

Singularitäten und Hodgetheorie

Christian Sevenheck

1 Einführung

Was ist eine Singularität? Diese Frage wird man abhängig vom Kontext sehr verschieden beantworten können. Selbst in der reinen Mathematik gibt es viele unterschiedliche Situationen, in denen man ein Objekt als singular bezeichnet. Hier ist eine (sehr unvollständige) Liste von „Singularitäten“:

1. *Lineare Algebra*: Eine Matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, k)$, wobei k ein Körper ist, heißt singular, falls ihre Determinante verschwindet.
2. *Analysis*: Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt singular bei $x \in \mathbb{R}$, falls $f'(x) = 0$ ist.
3. *Lineare Algebra und Analysis*: Eine differenzierbare Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt singular bei $x \in \mathbb{R}^n$, falls $\det(D_f)(x) = 0$ ist, wobei $D_f = (\partial/\partial x_i f_j)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ die Jacobimatrix von f ist.
4. *Differentialgleichungen*: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $0 \in I$ und $a : I \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, aber nicht nach 0 fortsetzbar, dann nennt man $0 \in I$ einen singularen Punkt der Differentialgleichung

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t).$$

Zwei typische Beispiele für solche Singularitäten sind $a(t) = k/t$, wobei k eine negative ganze Zahl ist oder $a(t) = -k/t^2$, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist. Im ersten Fall heißt die Singularität **regulär** (ein auf den ersten Blick seltsam klingender Begriff), im zweiten Fall **irregulär**. Diese Begriffe hängen mit den Lösungen solcher Differentialgleichungen zusammen; im ersten Fall ist eine Lösung durch $y(t) = t^k$ gegeben, im zweiten Fall durch $y(t) = e^{k/t}$. Diese Funktionen sind bei $t = 0$ nicht definiert (also „singular“), und die erste hat sogenanntes *gemäßigtes Wachstum* falls $t \rightarrow 0$, die zweite aber nicht.

5. *Topologie*: Betrachte eine Funktion f wie im Punkt 3 oben, dann ist eine Faser $f^{-1}(c)$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , falls c kein kritischer Wert ist, d.h. falls für alle $x \in f^{-1}(c)$ $(\det D_f)(x) \neq 0$ ist. Die kritischen Punkte von f heißen auch Singularitäten der Fasern $f^{-1}(c)$. Dies gilt in viel größerer Allgemeinheit: Ein Punkt $x \in M$ heißt Singularität, falls M bei x (d.h. in einer beliebig kleinen Umgebung von x) keine *Mannigfaltigkeit* ist.

Natürlich könnte man noch sehr viel mehr Beispiele aufführen. Die oben genannten hängen, obwohl sie auf den ersten Blick recht unterschiedlich aussehen, doch alle auf die eine oder andere Weise mit dem Thema dieses Textes zusammen. Wir wollen daher zunächst präzisieren, was im weiteren Verlauf nun genau unter einer Singularität verstanden werden soll. Heuristisch wollen wir das lokale Verhalten von sogenannten algebraischen oder analytischen Mengen an einem vorgegebenen Punkt untersuchen. Eine algebraische Menge (im Folgenden auch Varietät genannt) ist, vereinfacht gesagt, eine Menge X von Punkten in k^n (k soll hier ein Körper sein), an denen eine vorgegebene Menge von Polynomen $F_1, \dots, F_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ verschwinden. Man schreibt dann $X = V(F_1, \dots, F_n)$. Die einfachsten (interessanten) Beispiele sind algebraische Kurven, dies sind die Nullstellenmengen in k^2 eines einzelnen Polynoms $F \in k[x, y]$. Da wir uns später für topologische und analytische Aspekte solcher Nullstellenmengen interessieren, wollen wir uns im Folgenden auf die Fälle $k = \mathbb{R}$ und $k = \mathbb{C}$ (dies wird der wichtigere Fall sein) beschränken, und dann k immer mit \mathbb{K} bezeichnen. Was bedeutet es nun, dass wir solche algebraischen Mengen *lokal in der Umgebung eines Punktes* untersuchen wollen?

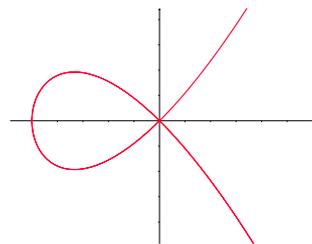


Abbildung 1. Der Newtonsche Knoten

\mathbb{R}^2 natürlich auch zeichnen, und sie sieht so wie in Abbildung 1 aus.

Vergleichen wir diese Varietät nun mit der Nullstellenmenge eines anderen Polynoms, nämlich $g = x^2 - y^2 = (x+y) \cdot (x-y)$, die man natürlich noch einfacher zeichnen kann, nämlich wie in Abbildung 2.

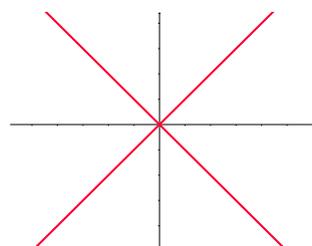


Abbildung 2. Der Doppelpunkt

Varietät reduzibel ist. Dies entspricht der Tatsache, dass das Polynom g ein Produkt zweier linearer Faktoren ist. Bei f ist das nicht der Fall, und deshalb nennt man $V(f)$ *irreduzibel*. Andererseits kann man aber leicht nachrech-

Statt einer formalen Definition betrachten wir lieber ein einfaches Beispiel. Sei $f = y^2 - x^2 \cdot (1 - x) \in \mathbb{K}[x, y]$. Dies ist eine wohlbekannte algebraische Kurve, nämlich der sogenannte Newtonsche Knoten. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ können wir die Nullstellenmenge von f , also die Menge $f^{-1}(0) \subset$

Offensichtlich sind diese beiden Kurven nicht gleich, auch nicht nach einer eventuellen Transformation der Ebene \mathbb{R}^2 . Dies sieht man am einfachsten, indem man sich überlegt, dass die Kurve $V(g)$ aus zwei Teilen besteht, nämlich den Geraden $V(x+y)$ und $V(x-y)$. Man sagt, dass diese

nen, dass

$$f = (y + x \cdot \sqrt{1-x}) \cdot (y - x \cdot \sqrt{1-x})$$

gilt. Ist also f doch reduzibel? Die Antwort lautet: ja und nein. Das Polynom f ist nicht als Produkt zweier Polynome darstellbar und daher ist $V(f)$ tatsächlich irreduzibel, wie auch aus dem Bild ersichtlich wird. Die obige Zerlegung von f funktioniert nur, wenn wir allgemeinere Objekte als Polynome betrachten. Hier wollen wir uns auf reell-analytische (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) oder holomorphe (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Funktionen beschränken. Sehr heuristisch sind solche Funktionen dadurch definiert, dass man fordert, dass sie sich in eine Taylorreihe mit positivem Konvergenzradius entwickeln lassen und eindeutig durch diese Entwicklung bestimmt sind. Die entsprechenden Ringe von Funktionen bezeichnen wir mit $\mathbb{K}\{x, y\}$. Offensichtlich ist die Funktion $\sqrt{1-x} \in \mathbb{K}\{x\}$, denn sie lässt sich in die konvergente Reihe $\sqrt{1-x} = \sum_{i \geq 0} \binom{2i}{i} \frac{(-1)^i}{(1-2i)4^i} x^i$ entwickeln. Betrachten wir also f als konvergente Potenzreihe, dann definiert sie eine (reell-analytische oder holomorphe) Funktion in einer kleinen Umgebung von $0 \in \mathbb{K}^2$. Und dann sieht man sofort am Bild von $V(f) \subset \mathbb{K}^2$, dass die Nullstellenmenge in dieser Umgebung reduzibel ist. Man kann sogar noch ein bisschen mehr sehen und auch leicht beweisen: Es gibt einen analytischen Isomorphismus, d.h. eine Abbildung $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{K}\{x, y\}^2$ mit der Eigenschaft $\det(D_\Phi)(0) = \det \begin{pmatrix} \partial_x \varphi_1 & \partial_x \varphi_2 \\ \partial_y \varphi_1 & \partial_y \varphi_2 \end{pmatrix} (0) \neq 0$, so dass $\Phi^* f = g \in \mathbb{K}\{x, y\}$ ist. Hierbei ist $\Phi^* f$ definiert als die Potenzreihe $\Phi^* f(x, y) := f(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$. Anschaulich heißt dies, dass die beiden Kurven $V(f)$ und $V(g)$ in der Nähe von $0 \in \mathbb{R}^2$ nach einem (analytischen) Koordinatenwechsel gleich sind. Auch das kann man am Bild erahnen. An diesem einfachen Beispiel erkennen wir schon eine der wichtigen Fragestellungen der Singularitätentheorie: Klassifiziere lokale Singularitäten bis auf Koordinatenwechsel! Der nächste Abschnitt handelt von diesem Problem. Aus allem, was bisher gesagt wurde, können wir die folgende Definition ableiten, die den Begriff einer Singularität für diesen Text festlegt.

Definition 1. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $R := \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}$ der Ring der konvergenten Potenzreihen in n Variablen. Ein Element $f \in R$, das $f(0) = 0$ und $(\partial_{x_i} f)(0) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt, heißt *Hyperflächensingularität*, im Folgenden auch kurz *Singularität* genannt.

Zu dieser Definition muss man natürlich bemerken, dass die Einschränkung auf Hyperflächen, d.h. die Tatsache, dass wir nur singuläre Punkte einer Varietät, die durch *eine* einzige Gleichung gegeben ist, betrachten, zunächst künstlich erscheint. Tatsächlich ist aber

über solche Hyperflächensingularitäten

unendlich viel mehr bekannt als im allgemeinen Fall. Außerdem kann man die Theorie der reellen Hyperflächensingularitäten als eine natürliche Verallgemeinerung der Diskussion von Extrema von Funktionen auffassen, und es ist klar, dass für sehr viele Anwendungen das Verständnis von Minima und Maxima von Funktionen eine zentrale Bedeutung hat. Aus allen diesen Gründen wollen wir uns hier darauf beschränken, (singuläre) Hyperflächen zu untersuchen. Es soll aber betont werden, dass das Studium von singulären Varietäten, die keine Hyperflächen sind, ein wichtiger Teil der Singularitätentheorie ist.

Wir wollen zum Abschluß dieser Einleitung noch einen anderen wichtigen Aspekt der Theorie von Hyperflächensingularitäten anschneiden; dieser betrifft den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Es ist ein allgemeines Prinzip der algebraischen Geometrie, polynomiale Gleichungen (oder Systeme davon) über dem algebraischen Abschluss des Körpers der Koeffizienten zu betrachten (wobei natürlich die Frage, welche der Lösungen, d.h. welche Punkte der Varietät in einem Unterkörper des Abschlusses liegen, von enormer Bedeutung ist). Aber speziell im Fall des Körpers \mathbb{C} kommt noch ein anderer Aspekt hinzu. Hierzu betrachten wir wieder ein einfaches Beispiel, Genaueres und präzise Definitionen finden sich im Abschnitt 3 weiter unten. Sei $g = x^2 + y^2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$, man sieht leicht, dass durch den Koordinatenwechsel $(x, y) \mapsto (x, i \cdot y)$ dies genau die Singularität g von oben ist. Der Einfachheit halber wollen wir allerdings hier doch g als Element von $\mathbb{C}[x, y]$ auffassen. Dadurch erhalten wir also eine Abbildung $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Für $t \in \mathbb{C}^*$ betrachten wir nun $g^{-1}(t) \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

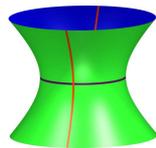


Abbildung 3. *Hyperboloid*

$g^{-1}(t)$ gleich der Menge $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 - c^2 = t\}$ ist, geometrisch also ein Hyperboloid, das in der Abbildung 3 zu sehen ist.

Besonders interessieren uns die Kurven $\Gamma = \{(a, b, 0) \in g^{-1}(\delta) \mid a^2 + b^2 = \delta\}$ (im obigen Bild violett eingezeichnet) und $\Delta := \{(0, b, c) \in g^{-1}(\delta) \mid b^2 - c^2 = \delta\}$ (im obigen Bild rot). Diese erzeugen die erste Homologie bzw. relative Homologie von $g^{-1}(\delta)$ (und damit dual die Kohomologie), genaueres dazu weiter im Abschnitt 3. Betrachte den Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\gamma(s) = e^{2\pi i s} \cdot t$.

Dann kann man (in diesem Fall direkt, mit etwas mehr Theorie auch im Allgemeinen, siehe wieder Abschnitt 3 unten) sehen, dass für alle $s \in [0, 1]$ die Faser $g^{-1}(t)$ zur Faser $g^{-1}(\gamma(s))$ diffeomorph ist, d.h. es gibt eine differenzierbare (sogar beliebig of differenzierbare) Abbildung zwischen diesen beiden Mengen, die umkehrbar ist, also eine Bijektion, und so dass die Umkehrung auch (beliebig

Es handelt sich um eine reell zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^4 , eben weil $0 \in \mathbb{C}$ der einzige kritische Wert von g ist. Durch Koordinatenwahl kann man leicht ausrechnen, dass

oft) differenzierbar ist. Was passiert nun unter dieser Abbildung mit den Kurven Γ und Δ ? Man kann auch hier direkt ausrechnen (für die Details siehe z.B. [Ebe01], Abschnitt 3.11), dass Γ in sich selbst überführt wird, genauer, um $\gamma(s)$ gedreht wird, während der Diffeomorphismus auf dem Rand des Hyperboloids (den man erhält, wenn man g^{-1} mit einem geeignet kleinen Ball in \mathbb{C}^2 schneidet) die Identität ist. Damit ergibt sich auch die Wirkung des Diffeomorphismus auf der Kurve Γ , für $s = 1$ wird sie in eine „gedrehte Kurve“ überführt, die einmal um die Schale des Hyperboloids herumläuft.

Wie unten genauer erläutert wird, heißt der beschriebene Diffeomorphismus für $s = 1$ die **geometrische Monodromie** einer Singularität (also hier von $g = x^2 + y^2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$). Später werden wir uns insbesondere für die Eigenwerte einer „linearisierten“ Form der Monodromie interessieren. Für den Fall g haben wir die Monodromie mit den obigen Überlegungen schon bestimmt.

2 Singularitäten: Milnorzahl und lokale Klassifikation

Wie in der Einleitung erläutert, befassen wir uns im Folgenden immer mit Hyperflächensingularitäten. Das Ziel soll es hier sein zu erläutern, wie man solche Objekte klassifizieren kann. Dazu brauchen wir zunächst die wichtigste Invariante einer Hyperflächensingularität, die wir gleich am Anfang definieren.

Definition 2 (Milnorzahl). [Mil68] Sei wie oben $R := \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}$ und $f \in R$. Schreibe $J_f = (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f) \subset R$ für das von den partiellen Ableitungen von f in R erzeugte Ideal und sei $M_f := R/J_f$ der Quotientenring, der natürlich auch ein \mathbb{K} -Vektorraum ist. Er heißt **Jacobi- oder Milnor algebra**.

1. f heißt eine **isolierte Singularität**, falls $\dim_{\mathbb{K}} M_f$ endlich ist, andernfalls heißt f **nicht-isolierte Singularität**.
2. Falls f isoliert ist, dann definieren wir $\mu := \mu(f) := \dim_{\mathbb{K}} M_f$ als die **Milnorzahl** von f .

Wie oben angedeutet, interessieren wir uns zunächst für eine Klassifikation von Singularitäten. Dies wollen wir zunächst präzisieren.

Definition 3 (Rechtsäquivalenz). $f, g \in R$ heißen **rechtsäquivalent**, wenn sie durch Koordinatenwechsel auseinander hervorgehen, d.h. falls es $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in R^n$ gibt, so dass $\det(D\Phi)(0) \neq 0$ und $g = \Phi^* f$ gilt. Falls $f \in \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}, g \in \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$, dann heißen f und g **stabil äquivalent**, falls $f + \sum_{j=1}^m \epsilon_j \cdot y_j^2$ zu g rechtsäquivalent ist, wobei $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$ sind.

Die Milnorzahl gibt einen ersten Anhaltspunkt zur Klassifizierung: Singularitäten, die nicht die gleiche Milnorzahl

haben, können auch nicht rechtsäquivalent sein. Der einfachste Fall, nämlich $\mu(f) = 1$, wird durch das folgende Ergebnis abgedeckt.

Theorem 4 (Das Morse-Lemma). *Sei $f \in R$ und $\mu(f) = 1$. Dann ist f rechtsäquivalent zu $g = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \cdot x_i^2$ mit $\epsilon_i \in \{1, -1\}$. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kann man $\epsilon_i = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ wählen.*

Um auch für größere μ zu einer Klassifizierung zu kommen, benutzt man den folgenden Trick: Man kann leicht zeigen, dass im Fall von $\mu > 1$ eine Singularität f rechtsäquivalent zu $g + \sum_{i=k+1}^n \epsilon_i x_i^2$ ist, wobei $g \in \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_k\}$ und die *Hesse-Matrix*

$$H(g) := (\partial_{x_i} \partial_{x_j} g)_{i,j=1,\dots,n}$$

von g bei $(x_1, \dots, x_k) = \underline{0} \in \mathbb{K}^k$ gleich der Nullmatrix ist. Interessiert man sich also für eine Klassifikation bezüglich *stabiler* Rechtsäquivalenz, so reicht es, nur solche Singularitäten g zu betrachten. Der Fall $k = 1$ ist auch sehr einfach; solch ein $g \in \mathbb{K}\{x\}$ mit Milnorzahl $\mu < \infty$ ist immer zu $\pm x^{\mu+1}$ rechtsäquivalent. Nach diesem Prinzip kann man bis zu vorgegebener Milnorzahl im Prinzip alle Singularitäten klassifizieren. Zum Beispiel erhält man folgendes Ergebnis.

Theorem 5 (Klassifikation bis $\mu \leq 7$). [AGZV88] *Alle Singularitäten f mit $\mu(f) \leq 7$ sind zu einem Element der folgenden Tabelle stabil äquivalent.*

Name	Definition	Milnorzahl
A_{2k} $k \in \{1, \dots, 4\}$	x^{2k+1}	$2k$
A_{2k+1} $k \in \{1, 2, 3\}$	x^{2k+2}	$2k + 1$
$A_{-(2k+1)}$ $k \in \{1, 2, 3\}$	$-x^{2k+2}$	$2k + 1$
D_k $k \in \{4, \dots, 7\}$	$x^2 y + y^{k-1}$	k
D_{-k} $k \in \{4, \dots, 7\}$	$x^2 y - y^{k-1}$	k
E_6	$x^3 + y^4$	6
E_{-6}	$x^3 - y^4$	6
E_7	$x^3 + xy^3$	7

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind A_{2k+1} und $A_{-(2k+1)}$ sowie D_k und D_{-k} und E_6 und E_{-6} auch rechtsäquivalent.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem folgenden sehr wichtigen Ergebnis, das einen neuen Aspekt der Klassifikation von Singularitäten anschnidet, den wir hier leider nicht genauer darstellen können.

Theorem 6 (Entfaltung, Einfache Singularitäten). 1. *Sei $f \in R$ eine Singularität. Eine Entfaltung (manchmal auch Deformation genannt) von f ist eine Singularität $F \in \mathbb{K}\{x, y\}$, so dass $F(\underline{x}, 0) = f(\underline{x})$ ist. Eine Entfaltung F von f heißt versell, falls sie alle anderen Entfaltungen $G(\underline{x}, z)$ von f induziert, d.h. falls es eine Abbildung $y = \Phi(z)$ gibt, so dass $\Phi^* F$ zu G rechtsäquivalent ist. Falls f eine isolierte Singularität hat und $[g_1], \dots, [g_\mu]$ eine Basis von M_f ist, dann ist $F(\underline{x}, y) := \sum_{i=1}^{\mu} y_i g_i$ eine verselle Entfaltung von f .*

2. Eine isolierte Singularität $f \in R$ heißt einfach, falls für eine verselle Entfaltung $F(\underline{x}, y)$ von f folgendes gilt: Nenne zwei Punkte y_1 und y_2 des Parameter-raumes der Entfaltung äquivalent, falls $F(-, y_1) \in R$ und $F(-, y_2) \in R$ rechtsäquivalent sind. Dann gibt es nur endlich viele Äquivalenzklassen von Parametern y . Die einfachen Singularitäten sind genau die Serien $A_{\pm k}$ für $k \geq 1$, also $f(x, y) = x^{k+1} \pm y^2$, $D_{\pm k}$ für $k \geq 4$, d.h. $x^2y \pm y^{k-1}$ sowie die Singularitäten $E_{\pm 6}$, E_7 aus der Tabelle im Theorem 5 und die Singularität E_8 , die durch $f(x, y) = x^3 - y^5$ gegeben ist.

Bemerkung: Warum haben wir die Singularität E_8 nicht in die obige Liste aufgenommen? Die Milnorzahl ist 8, so dass man die Klassifikation dann hätte bis zu $\mu = 8$ vornehmen müssen. Dabei stellt man fest, dass es nicht-einfache Singularitäten mit $\mu = 8$ gibt: Sei $f = x^3 + y^3 + z^3 + t \cdot xyz \in \mathbb{R}\{x, y, z\}$, es ist $\mu(f) = 8$ für alle $t \neq -1$, für $t = -1$ ist f nicht-isoliert. Man kann zeigen, dass für $t_1 \neq t_2$ (und $t_1 \neq -1$ und $t_2 \neq -1$) immer $F(-, t_1)$ nicht rechtsäquivalent zu $F(-, t_2)$. Daher ist also z.B. $g(x, y) = F(x, y, 0) = x^3 + y^3 + z^3$ nicht einfach.

3 Milnorfaser und Monodromie komplexer Singularitäten

Wir wollen hier das in der Einleitung betrachtete Phänomen der Monodromie etwas genauer und allgemeiner beschreiben. Dabei gehen verschiedene (Standard)konstruktionen aus der Topologie und der Differentialgeometrie ein, die wir natürlich nicht ausführlich erläutern können. Wir benutzen das bereits erwähnte Prinzip, dass man eine komplexe Singularität $f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$ als eine holomorphe Abbildung einer kleinen Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^n$ in eine kleine Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ auffassen kann. Dann kann man leicht sehen, dass dann nur $0 \in \mathbb{C}$ ein kritischer Wert dieser Funktion sein kann, und daher sind alle anderen Fasern $f^{-1}(t)$ für $t \neq 0$ komplexe Untermannigfaltigkeiten der (komplexen) Dimension $n - 1$. Man kann aber noch viel mehr über diese Fasern sagen. Dies leistet der folgende Satz.

Theorem 7 (Milnorfaserung). [Mil68] Sei $f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$ eine isolierte Singularität mit Milnorzahl μ . Dann existieren $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $f|_{B'} : B' \rightarrow S'$ eine C^∞ -lokal triviale Faserung ist. Hierbei sind $B' := B_\varepsilon \cap f^{-1}(S')$, $B_\varepsilon := \{\underline{x} \in \mathbb{C}^n \mid |\underline{x}| < \varepsilon\}$, $S' = S_\delta \setminus \{0\}$ und $S_\delta := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \delta\}$. Lokal trivial bedeutet, dass es für alle $t \in S'$ eine kleine Umgebung U_t gibt, so dass $f^{-1}(U)$ diffeomorph zu $U \times f^{-1}(t)$ ist. Die Übergangsfunktionen dieser lokalen Karten sind dann beliebig oft differenzierbar, d.h. aus der Klasse C^∞ . Zusätzlich ist die Einschränkung von f auf den Rand $\partial B' := S_\varepsilon \cap f^{-1}(D')$ global trivial. Für spätere Zwecke setzen wir $S := S_\delta$ und $B := B_\varepsilon \cap f^{-1}(S)$ und nennen sowohl $f|_{B'} : B' \rightarrow S'$ als auch $f|_B : B \rightarrow S$ eine Milnorfaserung von f .

Eine **Milnorfaser** $f^{-1}(t)$ ist homotopieäquivalent zu einem Bouquet vom μ Sphären S^{n-1} , dies bedeutet, dass sich $f^{-1}(t)$ stetig in einen Raum „deformieren“ lässt, der dadurch entsteht, dass man μ Kopien von S^{n-1} nimmt und diese an einem Punkt „zusammenklebt“ (dies ist eine Standardoperation in der algebraischen Topologie).

Wie in vielen Gebieten der Geometrie möchte man die oben beschriebene Situation vereinfachen, in gewissem Sinne „linearisieren“. Deshalb studiert man häufig nicht die Milnorfaserung selbst, sondern das davon abgeleitete Bündel der Kohomologien bzw. Homologien der Fasern. Homologien (und dual dazu Kohomologien) sind abelsche Gruppen (falls man \mathbb{Z} als Koeffizienten wählt) oder auch Vektorräume (Koeffizienten aus \mathbb{K}), die durch Klassen von „Zykeln“ in einem geometrischen Objekt definiert werden (hier können wir uns auf komplexe Mannigfaltigkeiten beschränken). Viele geometrische Operationen und Objekte (z.B. Schnittzahlen und eben auch Monodromien und Filtrierungen, siehe unten) haben „lineare“ Entsprechungen auf der Homologie bzw. Kohomologie.

Definition 8. Die kohomologische bzw. homologische Milnorfaserung ist die Vereinigung $H := \bigcup_{t \in S'} H^{n-1}(f^{-1}, \mathbb{C})$ bzw. $H^\vee := \bigcup_{t \in S'} H_{n-1}(f^{-1}, \mathbb{C})$. H (und H^\vee) ist ein holomorphes Vektorbündel auf S' vom Rang μ . Wir bezeichnen mit $\Gamma(S', H)$ die Menge seiner holomorphen Schnitte über S' , dann ist $\Gamma(S', H)$ ein freier $\mathcal{O}(S')$ -Modul, wobei $\mathcal{O}(S')$ den Ring der holomorphen Funktionen auf S' bezeichnet.

Wegen des oben angegebenen Homotopietyps der Milnorfaser sind alle Kohomologie- bzw. Homologiegruppen außer im Grad 0 und $n - 1$ gleich 0. Daher enthält das Vektorbündel H (bzw. sein duales Bündel H^\vee) wichtige Informationen über die Topologie der gegebenen Singularität f . In direktem Zusammenhang zur (ko)homologischen Milnorfaserung steht die **Monodromie**. Sie ist verwandt mit der sogenannten **flachen Struktur** auf H bzw. H^\vee , die wir zunächst erklären.

Lemma 9 (Flache Struktur, Gauß-Manin-Zusammenhang). Die Übergangsfunktionen der Vektorbündel H (bzw. H^\vee) sind konstant. Dies bedeutet, dass sich H schreiben lässt als $H = H^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(S')$, wobei die Elemente von H^\vee lokal konstante, aber mehrdeutige Schnitte von H sind (analog für H^\vee). Man sagt, H^\vee ist ein **lokales System**.

Als Spezialfall bekannter Aussagen der Topologie sowie der Differentialgeometrie folgt, dass diese flache Struktur äquivalent ist zu einem gewissen linearen Differentialoperator, der sich in einer gegebenen Basis von $\Gamma(S', H)$ (bzw. von $\Gamma(S', H^\vee)$) als ein System linearer Differentialgleichungen darstellen läßt. Solch ein Differentialoperator auf einem Vektorbündel heißt auch Zusammenhang. Es handelt sich also um einen \mathbb{C} -linearen Endomorphismus $\nabla_t \in \text{End}_{\mathbb{C}}(H)$, der $\nabla_t(g \cdot s) = g \nabla_t(s) + \partial_t(g)s$ für alle $g \in \mathcal{O}(S)$ und $s \in \Gamma(S', H)$ erfüllt (analog für H^\vee). Man nennt ihn den **topologischen Gauß-Manin-Zusammenhang**.

Es ist ein ebenfalls sehr allgemeiner Fakt, dass sich ein System von Differentialgleichungen wie oben beschrieben, also ein Zusammenhang auf einem holomorphen Vektorbündel auf S' eindeutig durch einen Automorphismus Mon von einer Faser, d.h. in diesem Fall von $H^n(f^{-1}(t), \mathbb{C})$, beschreiben lässt. Dies ist die oben schon erwähnte Monodromie von f . Man kann sie aber auch sehr schön geometrisch verstehen, wie wir es schon in der Einleitung angedeutet haben. Wir wollen diese geometrische Monodromie jetzt genauer erklären.

Definition 10 (Monodromie). Sei $f' : B' \rightarrow S'$ die Milnorfaserung einer lokalen Singularität und $t \in S'$. Wähle eine Überdeckung (U_i) von S' und lokale Trivialisierungen von $f'|_{f^{-1}(U_i)}$, die auf dem Rand $\partial B'$ mit einer gegebenen globalen Trivialisierung $\partial B' = S' \times \partial f^{-1}(t)$ übereinstimmen. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow S'$ ein Weg, der einfach um die $0 \in S$ herumläuft und $\gamma(0) = \gamma(1) = t$ erfüllt, z.B. $\gamma(s) := e^{2\pi i s} \cdot t$. Wähle eine Zerlegung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ von $[0, 1]$ in Intervalle, so dass für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt: $\gamma([s_{j-1}, s_j]) \subset U_i$ für ein i . Dann bekommt man durch Hintereinanderschalten der Trivialisierungen für alle $s \in [0, 1]$ einen Diffeomorphismus $h_s : (f')^{-1}(t) \rightarrow (f')^{-1}(\gamma(s))$, der auf dem Rand $\partial B'$ die Identität bezüglich der gegebenen Trivialisierung ist. Insbesondere nennen wir $h := h_1 : (f')^{-1}(t) \rightarrow (f')^{-1}(t)$ die **geometrische Monodromie** von f .

Der Diffeomorphismus h induziert einen Automorphismus $Mon \in \text{Aut}(H^n((f')^{-1}(t), \mathbb{C}))$ (und natürlich auch auf der Homologie). Dieser stimmt mit der durch die flache Struktur des Bündels H (bzw. H^\vee) definierten Monodromie überein und heißt **die Monodromie** von f .

4 Differentialformen und Hodgestrukturen

An den Anfang dieses Abschnittes wollen wir die folgende, sehr natürliche Fragestellung setzen, die sich direkt aus den Überlegungen des vorherigen Kapitels ergibt.

Problem 11. *Berechne die Monodromie einer gegebenen Singularität, insbesondere ihre Eigenwerte!*

Aus der Differentialgeometrie und der Topologie weiß man, dass sich die Kohomologie von glatten Mannigfaltigkeiten mit Differentialformen und *de Rham-Komplexen* berechnen lässt. Dies wenden wir jetzt für die Milnorfaserung an. Wir bezeichnen im Folgenden mit Ω_B^i den $(\mathcal{O}(B))$ -Modul der holomorphen Differentialformen vom Grad i , also das i -te äußere Produkt von Ω_B^1 .

Definition 12 (Brieskorn-Gitter). [Bri70] Sei $M := \Omega_B^n / df \wedge d\Omega_B^{n-2}$, dann ist M (via Multiplikation mit f) ein freier $\mathcal{O}(S)$ -Modul vom Rank μ . Er heißt das **Brieskorn-Gitter** von f . Auf die folgende Art definiert man einen Zusammenhang auf M : Sei $k \in \mathbb{Z}$, so dass $f^k \in J_f$ ist (zur Erinnerung: J_f ist das Jacobi-Ideal von f , also das Ideal, das von den partiellen Ableitungen erzeugt wird).

Jedes Element von Ω_B^n lässt sich als $g \cdot \text{vol}$ schreiben, wobei $g \in \mathcal{O}(B)$ und $\text{vol} := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ist. Dann existiert $\xi \in \Omega_B^{n-1}$ so dass $df \wedge \xi = f^k \text{vol}$ ist, und dann wird durch die Formel

$$t^k \cdot \nabla_t([g \cdot \text{vol}]) := d(g\xi) - k f^{k-1} g \text{vol} \quad (1)$$

ein Zusammenhang auf M mit Pol bei $0 \in S$ definiert. Dieser Pol definiert eine **reguläre Singularität** des Zusammenhangs (ähnlich zu Beispiel 4 in der Einleitung).

Die Einschränkung $M|_{S'}$ stimmt mit dem Vektorbündel H überein, und unter diesem Isomorphismus identifizieren sich die beiden Zusammenhänge. Daher heißt der auf M definierte Zusammenhang auch der **singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang**.

Wie kann man nun das Brieskorn-Gitter zur Berechnung der Eigenwerte der Monodromie benutzen? Hier können wir darauf nur eine partielle Antwort geben, die so nur für eine eingeschränkte Klasse von Singularitäten funktioniert. Dies sind die sogenannten **quasi-homogenen Singularitäten**, die wir hier einfach dadurch definieren, dass bei ihnen die oben eingeführte natürlich Zahl k gleich 1 ist. Dies sind also die $f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$, so dass $f \in J_f$ gilt. Es gehören zum Beispiel alle in Theorem 5 vorkommenden Singularitäten dazu. Für solche Singularitäten gilt Folgendes.

Theorem 13 ([Bri70]). Sei $f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$ quasi-homogen und isoliert mit Milnorzahl μ . Die Eigenwerte von Mon sind gegeben durch $(e^{-2\pi i \alpha_k})_{k \in \{1, \dots, \mu\}}$, wobei $(\alpha_k)_{k \in \{1, \dots, \mu\}}$ die Eigenwerte (der Klasse) des Operators $t \cdot \nabla_t$ auf dem μ -dimensionalen Vektorraum $M/t \cdot M$ sind. Diese Eigenwerte lassen sich einfach durch eine geeignete Wahl einer Basis der Jacobialgebra M_f (siehe Definition 2) bestimmen.

Sogar ganz allgemein kann man Folgendes zeigen.

Theorem 14 ([Bri70]). Sei $f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$ eine isolierte Singularität. Dann sind die Eigenwerte von Mon Einheitswurzeln.

Insbesondere sind also die Eigenwerte α_k in Theorem 13 immer rationale Zahlen.

Will man versuchen, die Eigenwerte von Mon im Allgemeinen zu bestimmen, so muss man wesentlich tieferliegende Methoden anwenden. Ein wichtiges Hilfsmittel hierzu, und natürlich auch für viele andere Fragestellungen, ist die Hodgetheorie. Hierbei handelt es sich um einen klassischen Teil der komplexen algebraischen Geometrie. Das grundlegende Prinzip ist, dass man mit Hodgestrukturen aus geometrische Informationen Objekte der Linearen Algebra (nämlich Vektorräume mit Filtrierungen) konstruiert. Dies setzt also die in Abschnitt 3 erwähnte Idee der „Linearisierung“ fort.

Wir wollen zuerst einige grundlegende Fakten über Hodgestrukturen erklären; diese betreffen den Fall von glatten und projektiven algebraischen Varietäten. Wir werden sehen, dass diese zu sogenannten reinen (und polarisierten) Hodgestrukturen führen. Etwas allgemeiner kann

man glatten quasi-projektiven Varietäten sogenannte gemischte Hodgestrukturen zuordnen. Die Milnorfaser einer isolierten Hyperflächensingularität ist allerdings nur eine komplexe Mannigfaltigkeit ohne algebraische Struktur. Trotzdem trägt ihre Kohomologie eine gemischte Hodgestruktur, dies wollen wir am Ende dieses Abschnittes erläutern.

Definition 15 ((reelle) Hodgestruktur). *Sei V ein k -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $w \in \mathbb{Z}$. Schreibe $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Eine (reine) Hodgestruktur vom Gewicht w ist eine absteigende Filtrierung $(F^{\bullet}) := (F^p)_{p \in \mathbb{Z}} := (F^p V_{\mathbb{C}})_{p \in \mathbb{Z}}$ (d.h. für alle $p \in \mathbb{Z}$ sind $F^p \subset V_{\mathbb{C}}$ und $F^p \subset F^{p-1}$ Inklusionen von \mathbb{C} -Untervektorräumen), so dass gilt: Es gibt eine Zerlegung in direkte Summen $V_{\mathbb{C}} := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F^p \cap \overline{F^{w-p}}$. Hierbei bezeichnen wir für einen beliebigen \mathbb{C} -Untervektorraum $U \subset V_{\mathbb{C}}$ mit \overline{U} den komplex-konjugierten Unterraum bezüglich V , d.h. $\overline{U} := \langle x \otimes \bar{c} \in V_{\mathbb{C}} \mid x \otimes c \in U \rangle_{\mathbb{C}}$. Eine gemischte Hodgestruktur ist durch eine zusätzliche aufsteigende Filtrierung $(W_{\bullet}) := (W_l)_{l \in \mathbb{Z}} := (W_l V)_{l \in \mathbb{Z}}$ auf V (!) gegeben, die die folgende Eigenschaft hat: Für alle $l \in \mathbb{Z}$ ist $gr_l W := W_l V / W_{l-1} V$ mit der induzierten Filtrierung $(F^k gr_l W \otimes \mathbb{C})_{k \in \mathbb{Z}} := \left(\frac{F^k V_{\mathbb{C}} \cap (W_l \otimes \mathbb{C}) + (W_{l-1} \otimes \mathbb{C})}{W_{l-1} \otimes \mathbb{C}} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine reine Hodgestruktur vom Gewicht l .*

Der folgende Satz beschreibt typische Situationen, die in der Geometrie zu Hodgestrukturen führen.

Theorem 16. 1. (siehe z.B. [PS08, Kapitel 1]) *Sei X eine glatte projektive Varietät über \mathbb{C} . Dann trägt für alle k die Kohomologie $H^k(X, \mathbb{C})$ eine reine Hodgestruktur vom Gewicht k .*

2. [Del71] *Sei Y eine glatte quasi-projektive Varietät. Wir können für unsere Zwecke annehmen, dass es eine glatte projektive Varietät X gibt, so dass $Y \subset X$ ist und so dass $X \setminus Y$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen ist, d.h. eine Untervarietät der Kodimension eins, die sich lokal als Verschwindungsmenge eines Produkts von (lokalen) Koordinaten schreiben lässt. Dann trägt jede Kohomologie $H^k(Y, \mathbb{C})$ eine gemischte Hodgestruktur.*

Kann man auch auf der Kohomologie einer Milnorfaser, d.h. auf den Fasern des Vektorbündels H auf S' eine gemischte Hodgestruktur finden? Die Antwort ist ja, und der Grund ist, dass sich eine isolierte Singularität immer in geeigneter Weise partiell „kompaktifizieren“ lässt: Zunächst gilt der klassische Satz, der sich aus etwas allgemeineren Aussagen von Mather ([Mat68]) schließen lässt.

Theorem 17. *Jede isolierte Singularität ist zu einem Polynom rechtsäquivalent.*

Dies impliziert, dass die Milnorfaserung $f : B' \rightarrow S'$ eingebettet werden kann in eine „kompakte Milnorfaserung“ $F : \overline{B'} \rightarrow S'$, deren Fasern projektive Mannigfaltigkeiten sind. Die Kohomologie jeder dieser Fasern $F^{-1}(t)$ trägt

also eine reine Hodgestruktur F^\bullet (man nennt dies eine **Variation von reinen Hodgestrukturen** über S'), und ein wiederum recht allgemeines Result von Schmid ([Sch73]) sagt, dass man in gewisser Weise den Grenzwert von F^\bullet für $t \rightarrow 0$ bilden kann, dies gibt eine Filtrierung F_{Sch}^\bullet , die Teil einer *gemischten* Hodgestruktur ist. Das folgende Resultat, das wir bewusst etwas unpräzise formulieren, um technische Schwierigkeiten auszublenden, sagt nun, dass man damit die gewünschte Struktur auf der Kohomologie der Milnorfaser definieren kann.

Theorem 18 (Scherk, Steenbrink, Varchenko). [SS85] Die Filtrierung F_{Sch}^\bullet induziert eine Filtrierung F_{St}^\bullet auf $H^{n-1}(f^{-1}(t), \mathbb{C})$. Die Monodromie Mon (genauer, der sogenannte nilpotente Anteil davon) definiert eine Gewichtsfiltrierung W_\bullet (tatsächlich, wie gefordert, schon auf der reellen Kohomologie der Milnorfaser). Das Tupel $(H^{n-1}(f^{-1}(t), \mathbb{C}), F_{St}^\bullet, W_\bullet)$ ist eine gemischte Hodgestruktur.

Die Hodgefiltrierung F_{St}^\bullet kann durch eine direkte Formel nur mit Hilfe des Brieskorn-Gitters M der Singularität f definiert werden.

Ohne auf die Details einzugehen, sei hier nur bemerkt, dass die oben beschriebene gemischte Hodgestruktur diskrete Invarianten besitzt, die sogenannten Spektralzahlen. Für eine quasi-homogene Singularität sind dies gerade die Zahlen α_k aus Theorem 13. Insbesondere haben die Spektralzahlen (nennen wir sie auch im Allgemeinen α_k) die schöne Eigenschaft, dass die Eigenwerte der Monodromie Mon immer durch $e^{-2\pi i \alpha_k}$ gegeben sind. Zusätzlich erfüllen sie die Symmetrie $\alpha_k + \alpha_{\mu+1-k} = \frac{n-2}{2}$, dies folgt aus Eigenschaften der Hodgefiltrierung F_{St}^\bullet . Tatsächlich kann man diese Spektralzahlen unter Zuhilfenahme von Computeralgebra auch berechnen, zumindest, wenn die Singularität nicht zu kompliziert ist (wenn sie zu einem Polynom von nicht zu hohem Grad rechtsäquivalent ist). Details hierzu, auch zu den existierenden Implementationen zum Beispiel im Computeralgebrasystem SINGULAR, kann man in [Sch04] und den dort zitierten Arbeiten finden. Es sei ebenfalls bemerkt, dass man auch Aussagen über die Jordanstruktur der Monodromie mit Hilfe der gemischten Hodgestruktur auf der Kohomologie der Milnorfaser treffen kann. Als Übersicht hierzu kann das Buch [Kul98] dienen.

5 Ausblick: Nicht-kommutative Hodgestrukturen

Dieser Abschnitt soll einige neuere Aspekte aus der Theorie der Hyperflächensingularitäten beleuchten. Naturgemäß müssen hier viele Details weggelassen werden, und die Darstellung ist auch nicht mehr so elementar wie in den ersten Abschnitten.

Wir haben im vorherigen Abschnitt gesehen, dass das Brieskorn-Gitter einer isolierten Hyperflächensingularität zur Definition einer gemischten Hodgestruktur auf der

Kohomologie der Milnorfaser benutzt werden kann. Aus vielen Gründen ist es aber von Nachteil, sich auf solch eine Hodgestruktur zu beschränken, da man damit einen wesentlichen Teil der im Brieskorn-Gitter enthaltenen Information verliert. Um dieses Problem zu umgehen, versucht man nun, den Begriff der Hodgestruktur zu verallgemeinern. Die folgende Definition hat viele Ursprünge, insbesondere durch Überlegungen aus der theoretischen Physik, eine der ersten Quellen ist sicherlich [CV91]. Zu den verschiedenen Varianten und Verfeinerungen kann man in den Übersichtsartikeln [Sab11] und [HS08] weitere Informationen finden.

Definition 19 (ncHodge-Struktur). *Eine nicht-kommutative Hodgestruktur besteht aus einem holomorphen Vektorbündel G auf \mathbb{C} (mit Koordinate z) sowie einem Zusammenhangsoperator $\nabla_z : G \rightarrow G$ mit einem Pol der Ordnung höchstens 2 bei $0 \in \mathbb{C}$ (und keinen weiteren Singularitäten). Desweiteren verlangen wir, dass die Monodromie von ∇ schon über \mathbb{R} definiert ist, man sagt, (G, ∇) hat eine (flache) reelle Struktur. Schließlich soll eine Reinheitsbedingung analog zu Definition 15 gelten: Man kann aus G eine kanonische Erweiterung zu einem Bündel $\hat{G} \rightarrow \mathbb{P}^1$ konstruieren, und die Forderung ist, dass dieses Bündel global trivial ist.*

Man kann ganz leicht durch die sogenannte Rees-Konstruktion sehen, dass sich jede reine Hodgestruktur auch als (reine) ncHodge-Struktur schreiben lässt. Der Pol des Zusammenhangs bei $z = 0$ hat dann aber nur Ordnung 1, und die Verallgemeinerung besteht (im Wesentlichen) darin, dass man auch Pole der Ordnung 2 zulässt. Obwohl dies auf den ersten Blick nicht wie ein großer Schritt aussieht, folgt aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungssysteme, dass sich solche Pole ganz anders verhalten und eine viel reichhaltigere Struktur aufweisen als Pole der Ordnung 1. Insbesondere kann die Singularität dieses Differentialgleichungssystems sowohl regulär als auch irregulär sein (siehe erneut Beispiel 3 in der Einleitung).

Was hat die bisher dargestellte Theorie nun mit nicht-kommutativen Hodgestrukturen zu tun? Stark vereinfacht gesprochen, erhält man aus jedem Brieskorn-Gitter M einer isolierten Singularität f eine ncHodge-Struktur, indem man folgende „Umbenennung“ von Variablen vornimmt: $t \longleftrightarrow z^2 \partial_z$ und $\partial_t \longleftrightarrow z^{-1}$. Dies ist eine Variante der klassischen Fouriertransformation von Funktionen (hier transformiert man die Differentialgleichungen, nicht ihre Lösungen). Da G ein Vektorbündel auf \mathbb{C} sein soll, muss also die Multiplikation mit z definiert sein, d.h. die Operation ∂_t^{-1} muss auf dem ursprünglichen Brieskorn-Gitter existieren. Dies ist tatsächlich der Fall; aus der Definition des Zusammenhangs ∇_t auf M (Gleichung (1)) schließt man, dass jede Klasse $[\omega] \in M$ ein eindeutiges Urbild in M unter ∇_t hat.

Es zeigt sich nun, dass sich viele klassische Ergebnisse über Hodgestrukturen auch auf den nicht-kommutativen Fall übertragen lassen, allerdings benötigt man für die

Beweise ganz andere Techniken. Wir wollen hier nur die Konstruktion von klassifizierenden Räumen und das Studium von Periodenabbildungen für Variationen von ncHodge-Strukturen erwähnen (siehe [HS08], [HS10]).

Ganz zum Schluss wollen wir noch andeuten, dass nicht-kommutative Hodgestrukturen, also anders gesagt, Brieskorn-Gitter von Funktionen mit isolierten Singularitäten, auch in einem ganz modernen Gebiet der algebraischen Geometrie, nämlich der Spiegelsymmetrie eine Rolle spielen. Es handelt sich hierbei um ein Phänomen, das auf Überlegungen in der theoretischen Physik, genauer, in der Stringtheorie basiert. Hier möchte man die Anzahl gewisser Kurven (eben der Strings) mit bestimmten Inzidenzbedingungen in algebraischen oder allgemeiner symplektischen Varietäten zählen. Dies und ähnliche Fragen der enumerativen Geometrie lassen sich mathematisch zusammenfassen und behandeln mit der sogenannten Quantenkohomologie. Dies ist eine im Allgemeinen sehr schwer zu bestimmende Zusatzstruktur auf der klassischen Kohomologie einer solchen Varietät. Spiegelsymmetrie besagt nun, dass man die zugehörigen Invarianten auch ganz anders, z.B. als Variation von Hodge-Strukturen einer anderen Varietät (oder einer Familie von Varietäten) bestimmen kann. Im klassischen Fall besteht diese Korrespondenz zwischen sogenannten Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten der Dimension 3. Die Hodgezahlen der Kohomologien dieser Mannigfaltigkeiten (Hodgezahlen sind die Dimensionen der Räume $F^p \cap \overline{F}^{w-p}$ aus Definition 15) sind, wenn sie geeignet angeordnet werden, bis auf eine „Spiegelung“ gleich, daher kommt der Name für die ganze Theorie.

Auch der Fall allgemeinerer als Calabi-Yau-Varietäten ist für die Spiegelsymmetrie interessant, und hier kommt die Singularitätentheorie ins Spiel. Insbesondere interessiert man sich dafür, einen „Spiegel“ für die Quantenkohomologie von sogenannten **Fano**-Mannigfaltigkeiten zu konstruieren. Man sieht leicht, dass es sich hierbei nicht mehr um eine Variation von Hodgestrukturen handeln kann. Wie wir unten sehen werden, ist das richtige Objekt dafür eine ncHodge-Struktur. Geometrisch ist das Ausgangsdatum hierfür ein sogenanntes **Landau-Ginzburg-Modell**, welches in dieser konkreten Situation aus einem Laurent-Polynom besteht, d.h. aus einer regulären algebraischen Abbildung von $(\mathbb{C}^*)^n$ nach \mathbb{C} . Solche Landau-Ginzburg-Modelle haben isolierte kritische Punkte, und man kann daher in Verallgemeinerung der Konstruktionen der Abschnitte 3 und 4 Milnorfaserungen und Brieskorn-Gitter sowie deren Fouriertransformation konstruieren. Diese geben dann ncHodge-Strukturen. Tatsächlich treten hierbei wirklich irreguläre Differentialgleichungssysteme auf; dies liegt daran, dass ein Laurent-Polynom im Allgemeinen (im Gegensatz zu den Singularitäten, die wir bis jetzt betrachtet haben) mehrere kritische Werte hat.

Viele Ergebnisse in der Spiegelsymmetrie betreffen die wichtige Klasse von **torischen Varietäten**. Diese werden durch kombinatorische Daten, z.B. die sogenannten Fächer oder auch durch Polytope definiert. Fächer sind

im Wesentlichen Vereinigungen von Kegeln im \mathbb{R}^n , die am Ursprung beginnen. Die ganzzahligen Punkte eines solchen Kegels bilden dann eine Halbgruppe, und dazu kann man den sogenannten Halbgruppenring bilden, der einer affinen algebraischen Varietät entspricht. Die verschiedenen Kegel eines Fächers klebt man entlang ihrer Ränder zusammen und konstruiert so auch allgemeine (z.B. projektive) algebraische Varietäten. In Abbildung 4 sieht man den Fächer des zweidimensionalen projektiven Raumes \mathbb{P}^2 , die einzelnen Kegel sind rot, blau und grün eingezeichnet. Sie entsprechen jeweils den affinen Varietäten \mathbb{C}^2 , die die drei verschiedenen Karten von \mathbb{P}^2 darstellen.

Beispiel 20. Das Landau-Ginzburg-Modell von \mathbb{P}^2 ist durch die Funktion $f : (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f(x, y) := x + y + \frac{1}{x \cdot y}$, gegeben.

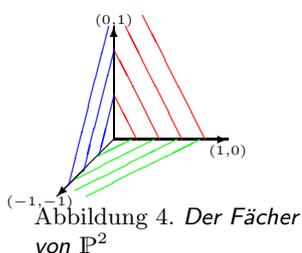


Abbildung 4. Der Fächer von \mathbb{P}^2

Wir sehen an diesem Beispiel, dass die Exponenten der Monome, die in der Funktion f vorkommen, gerade die Komponenten der Erzeuger der Kegel des Fächers von \mathbb{P}^2 sind. Dies ist im Wesentlichen das Prinzip der Konstruktion des Landau-Ginzburg-Modells.

Das folgende Resultat ist ein Beispiel für eine „Spiegelkorrespondenz“.

Theorem 21 (Spiegelsymmetrie). [Giv98, Iri09, RS10] Sei X eine n -dimensionale projektive torische Fanomannigfaltigkeit und $f : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}$ ihr Landau-Ginzburg-Modell. Die Quantenkohomologie definiert (mithilfe des sogenannten Giventalzusammenhangs) eine n Hodge-Struktur und diese ist isomorph zur Fouriertransformation des Brieskorn-Gitters von f .

Anmerkung: Bis jetzt ist noch gar nicht erklärt worden, wo der Name „nicht-kommutative Hodgestrukturen“ herkommt. Dies ist im Rahmen dieses Textes auch nicht möglich. Eine Idee davon wollen wir aber doch geben: In der Arbeit [KKP08] wird der Vorschlag gemacht, für differentiell-graduierte Algebren (oder auch allgemeinere Objekte, nämlich gewisse triangulierte Kategorien) die sogenannte periodisch-zyklische Homologie zu betrachten. Die Vermutung ist, dass man (unter geeigneten Voraussetzungen), dann immer eine n Hodge-Struktur erhält. Damit sollen solche Objekte in der nicht-kommutativen algebraischen Geometrie, die also das Studium von Varietäten durch das Studium von gewissen Kategorien ersetzt, dieselbe Bedeutung haben wie gewöhnliche Hodgestrukturen in der klassischen Theorie (siehe Theorem 16). Viele Aspekte dieser Vermutung liegen aber noch im Dunkeln und bleiben genaueren Untersuchungen in der Zukunft vorbehalten.

Ich danke Claus Hertling und Oliver Labs für ihre Hilfe beim Verfassen dieses Artikels.

Literatur

- [AGZV88] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. II*, Monographs in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1988.
- [Bri70] Egbert Brieskorn, *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Math. **2** (1970), 103–161.
- [CV91] Sergio Cecotti and Cumrun Vafa, *Topological–anti-topological fusion*, Nuclear Phys. B **367** (1991), no. 2, 359–461.
- [Del71] Pierre Deligne, *Théorie de Hodge. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1971), no. 40, 5–57.
- [DW08] Ron Y. Donagi and Katrin Wendland (eds.), *From Hodge theory to integrability and TQFT tt*-geometry*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 78, Providence, RI, American Mathematical Society, 2008.
- [Ebe01] Wolfgang Ebeling, *Funktionentheorie, Differentialtopologie und Singularitäten*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2001.
- [Giv98] Alexander Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), Progr. Math., vol. 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998, pp. 141–175.
- [HS08] Claus Hertling and Christian Sevenheck, *Twistor structures, tt*-geometry and singularity theory*, in Donagi and Wendland [DW08], pp. 49–73.
- [HS10] ———, *Limits of families of Brieskorn lattices and compactified classifying spaces*, Adv. Math. **223** (2010), no. 4, 1155–1224.
- [Iri09] Hiroshi Iritani, *An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds*, Adv. Math. **222** (2009), no. 3, 1016–1079.
- [KKP08] L. Katzarkov, M. Kontsevich, and T. Pantev, *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry*, in Donagi and Wendland [DW08], pp. 87–174.
- [Kul98] Valentine S. Kulikov, *Mixed Hodge structures and singularities*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 132, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Mat68] John N. Mather, *Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined mapgerms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1968), no. 35, 279–308.
- [Mil68] John Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, No. 61, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.
- [PS08] Chris A. M. Peters and Joseph H. M. Steenbrink, *Mixed Hodge structures*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [RS10] Thomas Reichelt and Christian Sevenheck, *Logarithmic frobenius manifolds, hypergeometric systems and quantum \mathcal{D} -modules*, Vorabdruck math/1010.2118, 2010.
- [Sab11] Claude Sabbah, *Non-commutative Hodge structures*, Vorabdruck arXiv:1107.5890, erscheint in „Annales de l’Institut Fourier (Grenoble)“, 2011.
- [Sch73] Wilfried Schmid, *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping*, Invent. Math. **22** (1973), 211–319.
- [Sch04] Mathias Schulze, *A normal form algorithm for the Brieskorn lattice*, J. Symbolic Comput. **38** (2004), no. 4, 1207–1225.
- [SS85] J. Scherk and J. H. M. Steenbrink, *On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fibre*, Math. Ann. **271** (1985), no. 4, 641–665.