Übungsaufgaben zur Katastrophentheorie

1. *(1 Punkt)* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ glatt, $\psi : U \to U$ ein lokaler Diffeomorphismus. Sei außerdem 0 ein kritischer Punkt von f. Sei weiterhin $g : U \to \mathbb{R}$ wie in der Vorlesung definiert durch $g(y) := f(\psi(y))$. Zeigen Sie, dass $D^2g(0)$ und $D^2f(0)$ gleichen Rank und gleichen Index haben.

2. *(1+2 Punkte)* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy^2 + x^2y$.
   (a) Was sind der Rang und der Index von f (d.h., der Rang und der Index von $D^2f(0)$) ?
   (b) Zeige, dass es einen lokalen Diffeomorphismus ϕ bei 0 in $\mathbb{R}^2$ gibt, welcher die Funktion f in die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = x^2 - y^2$ transformiert.

3. *(3 points)*
   Consider the space $\mathcal{T}(n, \mathbb{R})$ of upper triangular matrices and the space of $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ of symmetric matrices.
   (a) Show that both are $\frac{1}{2}n(n + 1)$-dimensional real vector spaces.
   (b) Let D_0 be a fixed diagonal matrix and $\alpha : \mathcal{T}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ be given as $\alpha(T) := T^{tr} \cdot D_0 \cdot T$. Show that α is a local diffeomorphism at $\mathrm{Id} \in \mathcal{T}(n, \mathbb{R})$ in the following way.
      i. Show that α is smooth.
      ii. Show that $D\alpha(\mathrm{Id})$ is the linear map $\mathcal{T}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ defined by $T \mapsto T^{tr} \cdot D_0 + D_0 \cdot T$.
      iii. Show that $D\alpha(\mathrm{Id})$ is injective (Hint: use the fact that T is upper triangular) and hence also surjective.

4. *(3 Punkte)*
   Sei $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
   (a) Welches sind die kritischen Punkte von f?
   (b) Geben Sie für $(x_0, y_0) \in U \backslash \mathrm{Crit}(f)$ einen lokalen Diffeomorphismus bei (x_0, y_0) an, welcher f in eine lineare Funktion transformiert.

Abgabe bis Dienstag, den 1. März 2011 um 13^{30} Uhr in A5.