

## Übungsaufgaben zur Algebra

1. (4 Punkte) Für  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  gibt es  $2^m$  unitäre Polynome vom Grad  $m$  im Polynomring  $\mathbb{F}_2[x]$ . Weil  $\mathbb{F}_2[x]$  ein Euklidischer Ring und damit ein faktorieller Ring ist, läßt sich jedes unitäre Polynom vom Grad  $\geq 1$  eindeutig als Produkt von unitären und irreduziblen Polynomen schreiben. Listen Sie alle 30 = 2 + 4 + 8 + 16 unitären Polynome vom Grad  $d \in \{1, 2, 3, 4\}$  und ihre Produkt-Zerlegungen in unitäre und irreduzible Polynome auf.

Hinweis: Beachten Sie Aussage (d) in der Liste in Aufgabe 2.

2. (6 Punkte) Ist  $R$  ein Integritätsring, so auch  $R[x]$  (Beweis leicht, aber nicht Teil der Aufgabenstellung). Daher ist der Begriff "irreduzibel" (Definition 7.17 (a) der Vorlesung) wohldefiniert für Polynome in  $R[x]$ . Bei Irreduzibilitätsuntersuchungen von Polynomen gibt es ganz verschiedene nützliche Kriterien und Aussagen. Einige sind hier aufgelistet:

- (a) Eisenstein-Kriterium (7.25 (c) in der Vorlesung): Sei  $R$  ein faktorieller Ring (z.B.  $R = \mathbb{Z}$ ) und  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]$  mit  $n \geq 1$ ,  $a_n \neq 0$ . Sei  $p \in R$  ein Primelement mit

$$p \mid a_j \text{ für } j \leq n-1, \quad p \nmid a_n, \quad p^2 \nmid a_0.$$

Dann ist  $f(x)$  irreduzibel in  $R[x]$ .

- (b) Die Projektion  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p$  ( $p$  eine Primzahl) induziert einen Ringhomomorphismus  $\pi_p : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{F}_p[x]$ . Sei  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ . Dann gilt:  $\pi_p(f(x))$  ist irreduzibel in  $\mathbb{F}_p[x] \Rightarrow f(x)$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Z}[x]$ .

- (c) Sei  $R$  ein faktorieller Ring,  $K$  sein Quotientenkörper (z.B.  $R = \mathbb{Z}$  und  $K = \mathbb{Q}$ ) und  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ . Dann gilt (7.25 (b) in der Vorlesung):

$f(x)$  ist irreduzibel in  $R[x] \Rightarrow f(x)$  ist irreduzibel in  $K[x]$ .

Ist  $\text{ggT}(a_n, \dots, a_0) = 1$ , so gilt  $\Leftarrow$ .

- (d) Sei  $R$  ein Integritätsring (z.B.  $R = \mathbb{Z}$  oder  $R$  ein Körper) und  $f(x) \in R[x]$  unitär mit  $\deg f(x) \in \{2, 3\}$ . Dann gilt:

$$f(x) \text{ ist irreduzibel in } R[x] \iff f(x) \text{ hat keine Nullstelle in } R.$$

Für  $\deg f(x) \geq 4$  gilt nur noch  $\Rightarrow$ . (Verallgemeinerung von 7.23 (b) auf  $R$  statt  $K$ )

- (e) Ist  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$  unitär mit einer Nullstelle  $b \in \mathbb{Z}$ , so ist  $b$  ein Teiler von  $a_0$ .

- (f) Sei  $R$  ein Integritätsring,  $f \in R[x]$  und  $\alpha \in R$  beliebig. Dann gilt:  $f(x)$  ist irreduzibel in  $R[x] \iff f(x + \alpha)$  ist irreduzibel in  $R[x]$ .

Zeigen Sie, daß die folgenden 12 Polynome irreduzibel in  $\mathbb{Z}[x]$  sind. Sie dürfen die Aussagen in der Liste oben benutzen. Sie dürfen auch die Resultate von Aufgabe 1 benutzen.

$$\begin{array}{ll} x^2 - x + 1 & , \quad x^2 - x - 1, \\ x^3 + x^2 - 2x - 1 & , \quad x^3 + 10x^2 + 9x - 15, \\ x^3 + 3x^2 - x - 1 & , \quad x^3 + 12x^2 + 24x + 48, \\ x^4 + x^3 + 16x + 17 & , \quad 3x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 5x + 15, \\ 7x^3 - 8x^2 + 17x - 135 & , \quad x^6 + 17, \\ x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 18 & , \quad x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 26x + 42. \end{array}$$

3. (2+2+2 Punkte) Für  $m \in \mathbb{N}$  ist das  $m$ -te Kreisteilungspolynom  $\Phi_m(x) \in \mathbb{C}[x]$  definiert durch

$$\Phi_m(x) := \prod_{a \text{ mit } 0 < a \leq m, \text{ggT}(a,m)=1} (x - e^{2\pi i \frac{a}{m}}).$$

(a) Zeigen Sie

$$x^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d(x).$$

(b) Zeigen Sie  $\Phi_m(x) \in \mathbb{Z}[x]$ . Sie dürfen folgende Aussage benutzen:

*(Polynomdivision mit Rest) Ist  $R$  ein Integritätsring und sind  $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$  und ist  $g(x)$  unitär, so gibt es eindeutige  $q(x), r(x) \in R[x]$  mit  $\deg r(x) < \deg g(x)$  und  $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ .*

(c) Es ist offenbar  $\Phi_1(x) = x - 1$  und  $\Phi_2(x) = x + 1$ . Berechnen Sie  $\Phi_m(x)$  für  $m \in \{3, 4, 6, 12\}$ .

**Abgabe bis Montag, den 28. Oktober, in der Vorlesung.**

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter etc.) sind unter

<http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~sevenhec/Algebra13.html>

zu finden.