

Numerische Methoden für Ingenieure

<http://www.tu-chemnitz.de/~rahi>

Übungsblatt 1 - Normen und Kondition

Aufgabe 1: Berechnen Sie für die folgenden Vektoren \mathbf{v} jeweils die Normen $\|\mathbf{v}\|_1$, $\|\mathbf{v}\|_2$ und $\|\mathbf{v}\|_\infty$.

a) $(0, 0, 1)^T$, b) $(1, -1, 1, -1)^T$, c) $(-2, 4, -5, 2)$, d) \mathbf{e}_k ,

wobei $\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ den k -te Einheitsvektor bezeichnet, d.h. den Vektor dessen k -ter Koeffizient 1 ist während alle anderen Koeffizienten 0 sind.

Aufgabe 2: Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ Vektoren und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen über die Normen $\|\mathbf{a}\|_1$, $\|\mathbf{a}\|_2$ und $\|\mathbf{a}\|_\infty$ auf Richtigkeit und versuchen Sie diese wenn möglich zu beweisen.

a) $\|\lambda \mathbf{v}\| = \lambda \|\mathbf{v}\|$, b) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$, c) $\|\mathbf{a}\| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Warum ist letzte die Null fett gedruckt?

Aufgabe 3: Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine reelle Zahl ungleich 0. Berechnen Sie für folgende Funktionen die absolute wie relative Kondition bezüglich einer Norm Ihrer Wahl:

a) $f(x) = x$, c) $f(x) = ax$, e) $f(x, y) = x + y$,
b) $f(x) = a + x$, d) $f(x) = x^2$, f) $f(x, y) = xy$.

Aufgabe 4: Betrachten Sie in der quadratische Gleichung

$$x^2 - 2px + q = 0$$

den Parameter q als Eingabegröße und die Lösungen $x_{1/2}$ als Ausgabegrößen. Für welche q ist das Problem schlecht konditioniert?

Aufgabe 5: Es seien $y = a_1x + b_1$ und $y = a_2x + b_2$ zwei Geradengleichungen. Betrachten Sie die beiden Achsenabschnitte b_1 und b_2 als Eingangsdaten und die x-Koordinate des gemeinsamen Schnittpunktes als gesuchte Größe. Bestimmen und interpretieren Sie die absolute und die relative Kondition dieses Problems.