Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Übung 9: Hermite'sche, normale, positiv definite Matrizen

1. Sei $V = \{f \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}) \mid f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0\}$,
$\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f \cdot g \, dx$.
Überprüfen Sie, welcher der Endomorphismen D_3, D_4 selbstadjungiert ist:
$$D_3 : \begin{array}{l} V \to V \\ f \to f''' = \dfrac{d^3}{dx^3} f \end{array} \qquad D_4 : \begin{array}{l} V \to V \\ f \to f^{(4)} = \dfrac{d^4}{dx^4} f \end{array}$$

2. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte reeller schiefsymmetrischer Matrizen ($A = -A^\top$) bzw. komplexer schief-Hermitescher Matrizen ($A = -A^H$) auf der imaginären Achse liegen.

3. Berechnen Sie den Trägheitsindex der Matrix A, sowie den Trägheitsindex der Matrix $B = G^\top A G$, mit
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Seien A, B symmetrische, positiv definite Matrizen. Zeigen Sie, dass dann die Matrix $A \cdot B$ nur positive Eigenwerte hat.

5. Sei $A = A^\top > 0 \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeigen Sie:
$\exists!\ B \in \mathbb{R}^{n,n} :\ B^2 = A$ mit $B = B^\top > 0$. (Bezeichnung: $B =: A^{\frac{1}{2}}$).
Man berechne die Quadratwurzel $A^{\frac{1}{2}}$ der folgenden Matrizen:
$$\text{a)} \qquad A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)} \qquad A = \begin{bmatrix} 33 & 6 & 6 \\ 6 & 24 & -12 \\ 6 & -12 & 24 \end{bmatrix},$$

6. (a) Zeigen Sie, dass die Matrizen der folgenden Form eine multiplikative Gruppe bilden:
$$\hat{G} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline a_1 & \\ \vdots & G \\ a_n & \end{array}\right] \quad \text{mit } G \text{ nichtsingulär.}$$
   (b) Zeigen Sie, dass die Matrizen der Gestalt $\hat{G}$ mit $G^{-1} = G^\top$ eine Untergruppe dieser Gruppe bilden.

7. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch positiv semidefinit. Zeigen Sie, dass dann die Elemente von A folgende Bedingungen erfüllen:
$$\begin{aligned} |a_{ij}| &\le \frac{a_{ii} + a_{jj}}{2} && (1) \\ |a_{ij}| &\le \sqrt{a_{ii} a_{jj}} \qquad (i \ne j) && (2) \\ \max_{i,j} |a_{ij}| &= \max_i a_{ii} && (3) \\ a_{ii} = 0 &\Rightarrow a_{ij} = 0 \text{ und } a_{ji} = 0, \quad j = 1, \ldots, n && (4) \end{aligned}$$