Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Übung 8: Bilinearformen

1. Wiederholung: Basisübergangsmatrizen, Matrixdarstellungen

   Seien $\mathcal{B}_i = \left\{ v_1^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)} \right\}$ beliebige Basen in $\mathbb{C}^n$.

   Die Basisvektoren $v_j^{(i)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ sind bzgl. der kanonischen Basis dargestellt als Spalten der Matrix $B_i \in \mathbb{C}^{n,n}$. $\mathcal{B}_0$ sei die kanonische Basis ($B_0 = I_n$).

   Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ habe bzgl. der einzelnen Basen $\mathcal{B}_i$ die Basisdarstellungen

   $$\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_n^{(i)})^\top, \quad \text{d.h.} \quad v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(i)} v_j^{(i)}.$$

   – Wie lautet die Basisübergangsmatrix von B_i nach B_j?
     d.h.: geg. $\lambda^{(i)}$, ges. P, so dass $\lambda^{(j)} = P \cdot \lambda^{(i)}$

   – Gibt es Vereinfachungen, wenn die $\mathcal{B}_i$ Orthonormalbasen sind?

   – Wie lautet die Matrixdarstellung der Basis $\mathcal{B}_i$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_j$?

   Beispiele in $\mathbb{C}^2$: $\quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix}.$

   In der kanonischen Basis sei ein Endomorphismus $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ gegeben durch:

   $$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$$

   Gesucht sind die Matrixdarstellungen F_i bezüglich der Basen $\mathcal{B}_i$.

2. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform ist.

   $$\alpha(x, y) = 4x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

   Geben Sie die Matrixdarstellung A_1 dieser Bilinearform bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ an. Wie lauten die Matrixdarstellungen A_2 und A_3 von α bezüglich der Basen $\{(1,1,1)^\top, (0,1,1)^\top, (0,0,1)^\top\}$ und $\{(1,1,0)^\top, (0,0,1)^\top, (1,0,0)^\top\}$?

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit der Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

   (a) Geben Sie den dualen Raum V^* und die zu B duale Basis in V^* an.

   (b) Sei $U = \operatorname{span}(b_2, b_3)$, was ist dann U^0 (geometrisch)?

4. Zeigen Sie, dass sich jede Bilinearform auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$) in eindeutiger Weise als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform darstellen lässt.