TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Übung 3: Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

1. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen. Welche der Matrizen sind diagonalisierbar (und wie)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Überprüfen Sie, ob die folgende Aussage gilt:
Wenn x ein Eigenvektor der Matrix A ist, so ist $\lambda = \dfrac{x^\top A x}{x^\top x}$ der x zugeordnete Eigenwert von A.

3. Welches sind die Eigenwerte einer unteren (oder oberen) Dreiecksmatrix?

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Was kann man über die Eigenvektoren oder die aus ihnen gebildete Matrix aussagen? (bei $a_{ii} \neq a_{kk}$ für $i \neq k$, oder sonst)

4. Bestimmen Sie zu folgender Matrix A das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und deren Vielfachheiten. Geben Sie die Begleitmatrix B zum charakteristischen Polynom an. Sind A und B ähnlich?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Zur Wiederholung: Bestimmen Sie den Durchschnitt der affinen Unterräume $v_1 + U$ und $v_2 + W$ im Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$, wobei

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in V \mid x + y + z = 0 \right\}, W = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$