Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

13. Hausaufgabe, zu erledigen bis: 9./10.07.2007

Wiederholen Sie den Stoff des 2. Semesters, so dass Sie in der Übung nach kurzer Vorbereitung bis zu 5 Minuten zu einem beliebigen Thema sprechen können.

---

1. Erklären Sie den Begriff *Hauptvektor* und dessen Zusammenhang mit der Jordan'schen Normalform einer Matrix. Welche Rolle spielen die Vielfachheiten eines Eigenwertes in der JNF? Beispiel:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
Wie kann man allgemein A^n berechnen, wenn die Transformation auf Jordanform bekannt ist?

2. Erläutern Sie mit Hilfe der Jordan-Form den Lösungsweg zur Lösung eines linearen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen $y'(x) = Ay(x)$
Beispiel:
$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= 2y_2 - y_1 \end{aligned}$$

3. Definieren Sie den Begriff *Nilpotenz*. Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage: $\exists B \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $B^2 = A$.

4. Definieren Sie die Begriffe *Bilinearform und Hermite'sche Form* (für beliebige Vektorräume). Zeigen Sie an einem Beispiel, was unter der Matrixdarstellung einer Bilinearform zu verstehen ist. Kann eine Hermite'sche Form eine Bilinearform sein?

5. Zeigen Sie den Zusammenhang zwischen einem *orthogonalen Endomorphismus* und der *Orthogonalität von Matrizen*. Gegeben sei in $\mathbb{R}^3$ eine Raumkurve $r(t)$, sowie eine parameterabhängige orthogonale Matrix $Q(t)$ mit $Q(t)r(0) = r(t)$. Es ist zu zeigen, dass $\|r(0)\|_2 = \|r(t)\|_2 \ \forall t$.

6. Definieren Sie die Begriffe: *adjungierter/selbstadjungierter Endomorphismus*, *normaler Endomorphismus*. Wie wirken sich diese Eigenschaften auf eine Matrixdarstellung des Endomorphismus aus? Man zeige, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten bei selbstadjungierten Endomorphismen (Matrixdarstellung!) orthogonal sind. Gilt dies auch für verschiedene Eigenvektoren zum selben Eigenwert? – Wenn nicht, was kann man dagegen tun?

7. Definieren Sie die Begriffe *Äquivalenz*, *Ähnlichkeit* und *Kongruenz* von Matrizen. Zeigen Sie, dass die Spur einer Matrix invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen ist.

8. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kongruenz von Matrizen und der Matrixdarstellung von Bilinearformen? Welche Bedeutung hat der Trägheitssatz für die Klassifikation von Quadriken der Form $x^\top Ax = c$, $c \geq 0$ (z.B. in $\mathbb{R}^2$)?

9. Definieren Sie den Begriff der *positiven Definitheit*. Geben Sie einige besondere Eigenschaften solcher Matrizen an. Zeigen Sie, dass für eine positiv definite Matrix A eine positiv definite Matrix B existiert mit $B^2 = A$.

10. Definieren Sie die Begriffe *dualer Raum*, *duale Abbildung*, *duale Basis*. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Annullator und orthogonalem Komplement eines Unterraumes.

11. Definieren Sie die Begriffe *Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasse, Quotientenmenge*. Erläutern Sie sie am Beispiel der Relationen über der Menge M aller Geraden im Raum: $g \sim h \Leftrightarrow g \perp h$ bzw. $g \sim h \Leftrightarrow g || h$ Geben Sie eine Klasseneinteilung an, wenn es sich um eine Äquivalenzklasse handelt.

12. Geben Sie jeweils die (symmetrische) Matrixdarstellung der Quadriken an und überführen Sie diese (an einem Beispiel) durch abstandserhaltende Transformationen in eine der Formen (XIV.10)-(XIV.12) und anschließend in eine der Formen (XIV.18)-(XIV.20).

$$\begin{aligned} x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 &= 1, \\ 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 5 &= 0 \\ (x_3 - 2)^2 - x_1x_2 &= 0 \end{aligned}$$

13. Für welche Endomorphismen kann man eine Matrixdarstellung in oberer Dreiecksform finden? Unter welchen Voraussetzungen kann man eine Matrix auf obere Dreiecksform bringen? Welche Eigenschaften der Matrix können dabei erhalten bleiben?

14. Erklären Sie die Aussage des Satzes von Cayleigh-Hamilton und skizzieren Sie die Beweisidee.