TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

12. Hausaufgabe, Abgabe: 02./03.07.2007

1. Zeigen Sie, dass die Mengen (3 P.)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \text{ orthogonal}\}, \\ \mathcal{U}(n) &= \{A \in \mathbb{C}^{n,n} \mid A \text{ unitär}\}, \\ \mathcal{SO}(n) &= \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \det A = 1\} \end{aligned}$$

multiplikative Gruppen sind.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ($\mathbb{C}^2$ mit Standardskalarprodukt) ein unitärer Endomorphismus ist. (4 P.)

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ix_2 \\ -ix_1 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie den zu f adjungierten Endomorphismus $g := f^{ad}$.

3. Es seien $W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume. Zeigen Sie: (6 P.)

   (a) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$,

   (b) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

4. Gegeben sei ein Vektor $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^\top \in \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt). Zeigen Sie, dass (5 P.)

$$f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } f(x) = a \times x = \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Kreuzprodukt)}$$

ein Endomorphismus ist. Bestimmen Sie den zu f_a adjungierten Endomorphismus und die Matrixdarstellungen beider Endomorphismen (bzgl. Standardbasis).
Für welche $a \in \mathbb{R}^3$ ist f_a orthogonal?