TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**

Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

11. Hausaufgabe, Abgabe: 25./26.06.2007

1. Handelt es sich bei den folgenden Abbildungen $\beta_i: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ jeweils um eine Bilinearform, eine symmetrische Bilinearform, eine Sesquilinearform, eine Hermite'sche Form? Geben Sie (falls es sich um eine dieser Formen handelt) die Matrixdarstellungen bzgl. der kanonischen Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ und der Basis $\{e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3\}$ an. (6 P.)

$$\begin{aligned}
\beta_1(x, y) &= 3x_1\bar{x}_1 + 3y_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_2, \\
\beta_2(x, y) &= x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_3 + x_3\bar{y}_1, \\
\beta_3(x, y) &= x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 \\
\beta_4(x, y) &= 3x_1\bar{y}_1 + x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_1 + 2ix_2\bar{y}_3 - 2ix_3\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3,
\end{aligned}$$

2. Gegeben sei der Untervektorraum

$$U = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \subset V = \mathbb{R}^5$$

Bestimmen Sie eine Basis von U^0. (6 P.)

3. Seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis von V sowie $w_1, \ldots, w_r \in W$.
Zeigen Sie, dass die im Beweis von Satz XI.8 definierte Abbildung $f: V \to W$

$$f(v) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i, \qquad \text{für } v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$$

linear ist. (2 P.)

4. Zeigen Sie, dass für Vektorräume V, W durch

$$\begin{aligned}
\text{Hom}(V, W) &\to \text{Hom}(W^*, V^*) \\
f &\mapsto f^*
\end{aligned}$$

(mit $f^*: W^* \to V^*, f^*(\psi) = \psi \circ f$) ein Vektorraumisomorphismus gegeben ist. (6 P.)