Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

10. Hausaufgabe, Abgabe: 18./19.06.2007

1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{A}$ ein Endomorphismus von V mit $\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ diagonalisierbar ist. (3 P.)

2. Lösen Sie das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen ($y_i = y_i(x)$) durch Transformation der Koeffizientenmatrix in Jordan'sche Normalform:

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 3y_2 - 7y_3, & y_1(0) &= 1 \\ y_2' &= -y_2 + y_3, & y_2(0) &= 1 \\ y_3' &= -y_2 - 3y_3, & y_3(0) &= 1 \end{aligned}$$

(6 P.)

3. Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (nach Übung 7/5)

$$y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

für $k = 1$ und $k = -1$. — (Zusatzaufgabe: für beliebiges $k \neq 0$). (6 P.)