TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

9. Hausaufgabe, Abgabe: 11./12.06.2007

1. Bestimmen Sie von folgender Matrix $A \in \mathbb{R}^{5,5}$ jeweils die Dimension der Räume

$$S_i = \text{Kern}\left(A^i\right), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Zeigen Sie, dass A nilpotent ist, und bestimmen Sie die Jordansche Normalform J von A (ohne Transformationsmatrix) durch Betrachtung der Differenzen

$$q_i = \text{Rang}\,(A^{i-1}) - \text{Rang}\,(A^i) \quad \text{bzw.} \quad q_i = \dim S_i - \dim S_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\sqrt{3} & 0 & 2 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(8 P.)

2. Beweisen Sie Aussagen (b)–(d) des Lemmas (vgl. Übung 7):

   Für $A, B, 0 \in \mathbb{C}^{n,n}$ (mit $AB = BA$) gilt:

   (b) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$,

   (c) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$,

   (d) $e^0 = I$.

   (Hinweis: Definition für e^A wie in Übung 7, Aufgabe 2) (5 P.)

3. Berechnen Sie den Ausdruck e^A für die Matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$. (5 P.)