Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

8. Hausaufgabe, Abgabe: 04./05.06.07

1. Zeigen Sie (mit Hilfe der Jordanschen Normalform):
   Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ist darstellbar als Summe $A = D + N$ einer diagonalisierbaren Matrix D und einer nilpotenten Matrix N.
   Diese Matrizen D und N sind vertauschbar: $DN = ND$. (4 P.)

2. Sei $J = J(\lambda, n) = \lambda I_n + N$ ein Jordanblock. Welche allgemeine Form haben dann die Elemente der Matrix J^k ? (3 P.)

3. (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{5,5}$ eine Matrix mit $p_A(\lambda) = (\lambda - 4)^3(\lambda - 3)^2$.
   Welche Form kann die Jordansche Normalform von A annehmen, wenn bekannt ist, dass das Minimalpolynom $m_A(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 3)^2$ ist?

   (b) Über die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{7,7}$ ist folgendes bekannt:

   $$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \mu(\lambda_1) = 3,\ \mu(\lambda_2) = 4,\ \nu(\lambda_1) = \nu(\lambda_2) = 2.$$

   Wie kann die Jordansche Normalform von A aussehen?
   Geben Sie alle (wesentlich) verschiedenen Möglichkeiten an.

   (c) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ habe den Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit $\mu(\lambda) = n$ und geometrischer Vielfachheit $\nu(\lambda) = m \leq n$. Was kann man über den Nilpotenzindex k von $(A - \lambda I)$ aussagen?
   Betrachten Sie als Beispiel den Fall $n = 5,\ m = 2$. (9 P.)