**TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik** **SS 2007**
**Prof. Dr. P. Benner**

# Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

## 6. Hausaufgabe, Abgabe: 21./22.05.2007

1. Beweisen Sie Satz X.36:

   Sei $\mathcal{A} \in End(V)$ und $p_{\mathcal{A}} \in \mathbb{K}[x]$ das zugehörige charakteristische Polynom.

   Dann gilt: $p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0 \in End(V)$. (4 P.)

2. Beweisen Sie Satz X.44:

   Sei $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V),\ \dim V = n$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

   (a) $\mathcal{A}$ ist nilpotent.

   (b) $\mathcal{A}^d = 0$ für $d$ mit $1 \leq d \leq n$.

   (c) $p_{\mathcal{A}}(x) = x^n$.

   (d) $\begin{bmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in [\,\mathcal{A}\,]$. (8 P.)

3. Es seien $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m,n}$. Zeigen Sie:

   (a) Alle von Null verschiedenen Eigenwerte von $AB \in \mathbb{R}^{n,n}$ sind auch Eigenwerte von $BA \in \mathbb{R}^{m,m}$.

   (b) Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von $AB$ mit geometrischer Vielfachheit $\nu$, so besitzt $\lambda$ auch als Eigenwert von $BA$ die geometrische Vielfachheit $\nu$.

   (c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrizen $AB$ und $BA$ für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(6 P.)

4. Bestimmen Sie die Haupträume der folgenden Matrix und geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Hauptvektorketten sowie die Matrixdarstellung von $A$ bezüglich dieser Basis an.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(6 P.)