Lineare Algebra/Analytische Geometrie II
2. Hausaufgabe, Abgabe: 23./24.04.2007

1. Überprüfen Sie, welche der folgenden Relationen jeweils auf der Menge $\mathbb{N}$ Äquivalenzrelationen sind: (4 P.)

   (a) $(m,n) \in R_1 :\Leftrightarrow\ m+n$ gerade

   (b) $(m,n) \in R_2 :\Leftrightarrow\ m+n$ ungerade

   (c) $(m,n) \in R_3 :\Leftrightarrow\ |m-n| \leq 2$

   (d) $(m,n) \in R_4 :\Leftrightarrow\ \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ \dfrac{m}{n} = 2^k$

2. Gegeben sei die Klasseneinteilung $M = \bigcup\limits_{T \in M/R} T$ einer Menge M bezüglich einer Äquivalenzrelation R. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\pi : M \to M/R, \quad u \mapsto T_u$$

   surjektiv ist, wobei $T_u \in M/R$ diejenige Äquivalenzklasse ist, zu der das Element u gehört. Wann (bzw. für welche Relation R) ist die Abbildung bijektiv? (3 P.)

3. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $V = \mathbb{K}^m$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Basis $\{u_1, \ldots, u_m\}$ und $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ die Menge der Homomorphismen $\varphi : V \to \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ mit

$$\varphi_i(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \forall i,j = 1, \ldots, m$$

   eine Basis in V^* bildet. (3 P.)

4. Beweisen Sie Teile <u>(d-e)</u> des Satzes (IX.18) :
   Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. (6 P.)

   (a) Ist $\{v_1, \ldots, v_s\}$ eine Basis von V, so ist $\{v_1 + U, \ldots, v_s + U\}$ ein Erzeugendensystem von V/U.

   (b) $V = U + \mathrm{span}\,\{v_1, \ldots, v_t\} \ \Rightarrow\ V/U = \mathrm{span}\,\{v_1 + U, \ldots, v_t + U\}$

   (c) $v_1, \ldots, v_s \in V$ und $v_1 + U, \ldots, v_s + U$ linear unabhängig in V/U, dann sind $v_1, \ldots, v_s$ lin. unabhängig in V.

   (d) $v_1, \ldots, v_s \in V$ und $v_1 + U, \ldots, v_s + U$ linear unabhängig in V/U, dann gilt:
   $u_1, \ldots, u_r$ linear unabhängig in $U \ \Rightarrow\ u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ lin. unabhängig in V.

   (e) Sei $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis von U, $v_1, \ldots, v_s \in V$, dann gilt
   $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ ist Basis von $V \Leftrightarrow \{v_1 + U, \ldots, v_s + U\}$ ist Basis von V/U.

5. Seien $U, W \subset V$ Unterräume eines Vektorraums V, $v_1, v_2 \in V$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt affiner Unterräume $v_1 + U$ und $v_2 + W$ wieder ein affiner Unterraum ist. (4 P.)