Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

1. Hausaufgabe, Abgabe: 16./17.04.2007

1. Zeigen Sie: Jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $\det A = 1$ ist eine *Drehungsmatrix*:

$$A \in \mathbb{R}^{2,2} \text{ orthogonal, } \det A = 1 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \varphi : \quad A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

   Hinweis:
   Man betrachte für eine beliebige 2×2-Matrix sowohl $A^\top A$, als auch $AA^\top$. (5 P.)
   Zusatz:
   Welche allgemeine Gestalt haben die anderen orthogonalen Matrizen aus $\mathbb{R}^{2,2}$, die nicht in die oben betrachtete Kategorie fallen ? (2 P.)

2. Man finde eine Basis in $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ (3 P.)

3. Sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$ und sei

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & 0 & & \\ & 0 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

   (a) Ist $\langle v, w\rangle_J = w^\top J v$ ein Skalarprodukt?
   (b) Ist $\langle v, w\rangle_A = w^\top A v$ ein Skalarprodukt? (4 P.)

4. Gibt es jeweils eine lineare Abbildung $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^i$ mit

   (a) $i = 1$: $f_1(1,1) = -1$, $f_1(3,2) = -1$, $f_1(2,0) = 2$;
   (b) $i = 2$: $f_2(2,0) = (0,1)$, $f_2(1,1) = (5,2)$, $f_2(1,2) = (2,3)$;
   (c) $i = 3$: $f_3(0,1) = (1,0,1)$, $f_3(1,1) = (2,1,-1)$, $f_3(-1,1) = (0,-1,3)$?

   Falls f_i linear ist, geben Sie je eine Basis für Kern und Bild von f_i sowie die Matrixdarstellung F_i bezüglich der Standardbasen an. (7 P.)

5. Gegeben ist je eine Basis in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   Die lineare Abbildung $T :\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ sei bzgl. dieser Basen definiert durch die Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Man berechne die Bilder $y_i = T(x_i)$ der Vektoren x_i (jeweils in der Koordinatendarstellung bzgl. der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$).

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -17 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

   (6 P.)

6. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{End}(V)$ aller Endomorphismen über einem Vektorraum V mit den Operationen $+$ und $\circ$ eine Algebra bildet [$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$, $(f \circ g)(v) = f(g(v))$]. (3 P.)