TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

Übung 9 : Vektorräume

1. Gegeben seien zwei (feste) Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie eine geometrische Deutung für die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ an:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \mid \alpha \geq 0,\, \beta \geq 0,\, \alpha + \beta = 1\}, \\ M_2 &= \{\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R},\, \alpha + \beta = 1\}, \\ M_3 &= \left\{\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}\right\}. \end{aligned}$$

2. In der Ebene ($\cong \mathbb{R}^2$) seien ein Punkt O (der Pol) und ein von O ausgehender Strahl (die Polarachse) gegeben. Dann wird die Lage eines Punktes $P \neq O$ in der Ebene bestimmt durch

   die Abweichung von der Polarachse (Winkel, in Bogenmaß) φ
   und den Abstand $\overline{OP} = r$ vom Pol,

   wobei ein positiver Winkel φ entgegen dem Uhrzeigersinn gerechnet wird. Dem Punkt O wird kein Winkel φ zugeordnet.
   (r, φ) sind die <u>Polarkoordinaten</u> von P.

   (a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Polarkoordinaten (r, φ) und kartesischen Koordinaten (x, y), wenn man den Pol als Ursprung und die Polarachse als x-Achse eines rechtwinkligen kartesischen x-y-Koordinatensystems wählt?

   (b) Stellen Sie folgende in kartesischen Koordinaten (x, y) oder in Polarkoordinaten (r, φ) gegebenen Punkte jeweils im anderen Koordinatensystem dar:

$$\begin{array}{lll} (x_1, y_1) = (1, -1), & (x_2, y_2) = (0, 1), & (x_3, y_3) = (3, 4) \\ (r_4, \varphi_4) = (1, -\frac{\pi}{4}), & (r_5, \varphi_5) = (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), & (r_6, \varphi_6) = (1, 0) \end{array}$$

   (c) Geben Sie in Polarkoordinaten die Gleichung $g(r, \varphi) = 0$ der Geraden an, die senkrecht auf der Polarachse steht und diese im Abstand a vom Pol schneidet.

   (d) Drücken Sie die Gleichungen folgender Kurven in Polarkoordinaten aus:

   (1) $x^2 - y^2 = a^2$,
   (2) $x^2 + y^2 = a^2$,
   (3) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$,
   (4) $y = x$.

3. Gegeben sei die Menge V_0 aller (als gerichtete Strecke dargestellten) Vektoren $\overrightarrow{OP}$ in der Ebene, deren Anfangspunkt O im Koordinatenursprung liegt. Welche der folgenden Teilmengen von V_0 sind Vektorräume über $\mathbb{R}$?

   a) $\{\overrightarrow{OP} \in V_0 : P$ liegt auf einer gegebenen Geraden$\}$

   b) $\{\overrightarrow{OP} \in V_0 : P$ liegt in der „rechten" Halbebene$\}$,

   c) $\{\overrightarrow{OP} \in V_0 : P$ liegt im ersten oder dritten Quadranten$\}$

4. Zeigen Sie, dass die Menge aller reellen (bzw. komplexen) Polynome vom Grade $\leq n$ bezüglich der punktweisen Operationen einen reellen (bzw. komplexen) Vektorraum bildet.

5. Sei $\mathcal{P}_2^C$ der Vektorraum aller Polynome auf $\mathbb{C}$ (mit komplexen Koeffizienten) vom Grade ≤ 2.
   Untersuchen Sie, ob die Abbildung $f : \mathcal{P}_2^C \to \mathbb{C}^3, \quad f(ax^2+bx+c) = (a-c, b-c, a+c)$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist!

6. Sind die folgenden Teilmengen U_1, U_2 des $\mathbb{R}^4$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$?

   $U_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
   $U_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 1, x_3 + x_4 = 2\}$.

7. Geben Sie für folgende Vektorräume V_1, V_2 über dem Körper K jeweils (mindestens) einen Homomorphismus an, $\varphi :\ V_1 \longrightarrow V_2$.
   Ist dies auch ein Endomorphismus / Isomorphismus / Automorphismus ?

   (a) $K = \mathbb{R},\ V_1 = \mathbb{C},\ V_2 = \mathbb{R}$
   (b) $K = \mathbb{R},\ V_1 = \mathbb{R},\ V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   (Mit welchen Operationen ist V_2 ein Vektorraum?)
   (c) $K = \mathbb{R},\ V_1 = \mathbb{R}^2,\ V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z\}$
   (d) $K = \mathbb{Z}_2,\ V_1 = K^{2,2},\ V_2 = K^4$

8. Sind folgende Teilmengen Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$?

   $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
   $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y = 1\}$
   $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ z = 0\}$
   $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$
   $U_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = t, y = 2t, z = 4t,\ t \in \mathbb{R}\}$
   $U_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y^2 = 0, z = 0\}$

   Wie lassen sich die Mengen U_i geometrisch beschreiben?
   Welche Mengen erhält man als Summe $U_7 = U_3 + U_4$, bzw. $U_8 = U_4 + U_5$?
   Handelt es sich dabei um direkte Summen?

Wiederholungen, Ergänzungen, Übungen

1. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe der Cramer'schen Regel:

$$\begin{array}{rrrrcl} & -x_2 & & +2x_4 & = & 1 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & 1 \\ & 2x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & & -x_3 & & = & 1 \end{array}$$

Definition:
Die Permanente einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist die Zahl

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

---

2. Prüfen Sie, ob für die <u>Permanente</u> per (A) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ähnliche Rechenregeln wie für die Determinante det (A) gelten.

   (a) Vertauschung von zwei Zeilen in A.
   (b) Zwei gleiche Zeilen in A.
   (c) Multiplikation einer Zeile mit λ.
   (d) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.
   (e) per $(A \cdot B)$
   (f) per $(A^\top)$
   (g) obere (untere) Dreiecksmatrix

3. Berechnen Sie die Permanente folgender Matrizen.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$$

$$E = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Für welche reellen Werte von φ ist die **Permanente** der folgenden Matrizen gleich Null?

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & \varphi & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 1 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \varphi-2 & 1 & 1 \\ 0 & \varphi-1 & 1 \\ -1 & 1 & \varphi+1 \end{bmatrix}$$