TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

Übung 8 : Matrizen, Permutationen, Determinanten

1. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen X jeweils invertierbare Matrizen V und W, so dass das Produkt $V X W$ in Normalform unter Äquivalenztransformation ist, d.h. $VXW = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Sind V und W eindeutig bestimmt?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,6}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_{11}^{4,6}$$

2. Bestimmen Sie von folgenden Permutationen $\sigma_i \in S_8$ jeweils das Signum. (Begründung!)

$$\sigma_1 = (1,2,4,5,7,8,6,3), \quad \sigma_2 = (8,7,6,5,4,3,2,1),$$
$$\sigma_3 = (4,3,2,1,8,7,6,5), \quad \sigma_4 = (1,5,2,6,7,3,4,8).$$

3. Unter einer Transposition versteht man eine Permutation, die alle bis auf zwei Elemente festhält (nur zwei Elemente vertauscht).
   (a) Zeigen Sie, dass jede Transposition eine Permutation mit Signum -1 ist.
   (b) Zeigen Sie, dass jede Permutation mit Signum $+1$ (bzw. -1) als Produkt einer geraden (bzw. ungeraden) Anzahl von Transpositionen dargestellt werden kann.
   (c) Wie verhält sich das Signum gegenüber der Produktbildung von Permutationen: $\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2)$?
   (d) Von sämtlichen Permutationen vom Grade 4 (d.h., $\forall\, \sigma \in S_4$) bestimme man das Signum.

4. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen aus $\mathbb{R}^{n,n}$ mit möglichst *„effektivem“* Lösungsweg.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$$

$$E = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Für welche reellen Werte von φ ist die Determinante der folgenden Matrizen gleich Null:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & \varphi & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 1 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \varphi-2 & 1 & 1 \\ 0 & \varphi-1 & 1 \\ -1 & 1 & \varphi+1 \end{bmatrix}$$

Wiederholungen, Ergänzungen, Übungen

1. Aus Übung 5 ist die LU-Zerlegung der Matrix A bekannt:

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die LU-Zerlegung von $A^\top$.

2. Zeigen Sie: Jede diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist regulär (invertierbar).

   Hinweise:

   – (zeilen-) diagonaldominant: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

   – zeige: $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

3. Es sei $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Permutationsmatrix.

   (a) Zeigen Sie, dass $P^{-1} = P^\top$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $P^k = I$ gilt.

   (c) Bestimmen Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{7,7}$, so dass $P^j \neq I$ für $j = 1, 2, \ldots, 9$ und $P^{10} = I$ gilt.

4. Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ und $P_1 A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad AP_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$.

   Berechnen Sie: $AP_1^\top, \quad P_2AP_2^\top, \quad [1, 2, 3]P_1$.