TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

Übung 1 : Einführung Aussagenlogik

1. Definieren Sie den Begriff *Mathematische Aussage* und entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke auch Aussagen sind.

   (a) π^2 ist kleiner als 10

   (b) π ist eine rationale Zahl

   (c) Warum ist π keine rationale Zahl ?

   (d) $\frac{d}{dx}(x^3 - 1) + 2$

   (e) $\frac{d}{dx}(x^3 - 1) + 2 = x^2 + 2$

   (f) $\int_0^1 (x^2 + x + 1)dx$

   (g) $\int_0^1 (x^2 + x + 1)dx = \frac{11}{6}$

   (h) $\int_0^1 (x^2 + x + 1)dx > \frac{11}{6}$

   (i) Aussage (g) oder (h) ist falsch

   (j) Mampu ist kataklytisch.

   (k) Dies ist keine Aussage.

   (l) Mit diesen Worten spreche ich eine Lüge aus.

   (m) Nachts ist es kälter als draußen.

   (n) $\sqrt{2}$ ist irrational.

2. Überprüfen Sie, welche der Aussagen aus Aufgabe 1 wahr sind.

3. (a) Was bedeutet es, Aussagen zu verknüpfen ?

   (b) Erläutern Sie die Begriffe *Konjunktion*, *Disjunktion*, *Implikation*, *Negation* und *Äquivalenz* ?

   (c) Ordnen sie die mathematischen Symbole $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ den obigen Begriffen zu.

4. Stellen Sie die Beziehungen
   - „A ist hinreichend für B"
   - „A ist notwendig für B"
   - „A ist notwendig und hinreichend für B"

   mit den in Aufgabe 3 eingeführten Symbolen dar.

5. Untersuchen Sie den Satz *„Wenn es regnet, dann ist die Straße nass."* auf notwendige und hinreichende Aussagen.

6. Seien A und B Aussagen. Stellen Sie die Wahrheitstafeln für die Verknüpfungen $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $(A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)$ und $(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$ auf.

7. (a) Zeigen Sie die beiden folgenden Verneinungsregeln

$$\begin{aligned}[\neg(A \vee B)] \quad &\Leftrightarrow \quad [(\neg A) \wedge (\neg B)] \\ [\neg(A \wedge B)] \quad &\Leftrightarrow \quad [(\neg A) \vee (\neg B)]\end{aligned}$$

   (b) Beweisen Sie

$$\begin{aligned}[A \vee B] \quad &\Leftrightarrow \quad [\neg(\neg A \wedge \neg B)] \\ [A \wedge B] \quad &\Leftrightarrow \quad [\neg(\neg A \vee \neg B)]\end{aligned}$$

   (c) Drücken Sie die Aussage: *„Mir ist kalt und ich bin hungrig."* äquivalent aus, ohne ein *„und"* zu verwenden.

8. Verifizieren Sie die logischen Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}[(A \vee B) \wedge C] \quad &\Leftrightarrow \quad [(A \wedge C) \vee (B \wedge C)] \\ [(A \wedge B) \vee C] \quad &\Leftrightarrow \quad [(A \vee C) \wedge (B \vee C)]\end{aligned}$$

9. Überprüfen Sie, ob folgende Beziehungen wahr sind:

$$\begin{aligned}(A \vee B) \vee C \quad &\Leftrightarrow \quad A \vee (B \vee C) \\ (A \wedge B) \wedge C \quad &\Leftrightarrow \quad A \wedge (B \wedge C)\end{aligned}$$

10. Erläutern Sie die Begriffe *Tautologie* und *Kontradiktion* und entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen Tautologien sind.

    (a) $A \vee (\neg A)$

    (b) $A \wedge (\neg A)$

    (c) $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\neg A \vee B]$

11. Stellen Sie die Wahrheitstabelle des logischen exklusiven Oders (`XOR`) auf und stellen Sie diese Verknüpfung mittels $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ dar.

12. Zeigen Sie, dass $[A \wedge (A \vee B)] \Leftrightarrow [A \vee (A \wedge B)] \Leftrightarrow A$ gilt.

13. Vereinfachen Sie die folgenden Aussagen:

    (a) $(A \vee B) \vee (A \wedge B)$

    (b) $(A \vee B) \wedge (\neg(\neg A \wedge (A \vee B)))$

    (c) $(A \wedge B) \vee (A \vee (B \wedge A))$

14. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen Tautologien sind, und überlegen Sie sich, wozu Aussage (a) gut sein kann.

    (a) $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

    (b) $A \Rightarrow (B \Leftrightarrow (\neg A \vee B))$

15. Zeigen Sie, dass die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ zweier Aussagen A und B unter anderem auf die folgenden vier Arten bewiesen werden kann:

    (a) Zeige sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $B \Rightarrow A$

    (b) Zeige sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $\neg A \Rightarrow \neg B$

    (c) Zeige sowohl $B \Rightarrow A$ als auch $\neg B \Rightarrow \neg A$

    (d) Zeige sowohl $\neg A \Rightarrow \neg B$ als auch $\neg B \Rightarrow \neg A$

16. Zeigen Sie, dass

$$[(\neg A) \Rightarrow A] \Leftrightarrow A$$

    gilt, und überlegen Sie sich, wie man dies zum Beweis einer Aussage einsetzen kann.

17. Überlegen Sie sich, dass die Wahrheit einer Aussage A wie folgt gezeigt werden kann:

    Weise für eine definitiv falsche Aussage B nach, dass $[\neg A] \Rightarrow B$ wahr ist.

18. Lady Pickerton weist ihren neuen Butler James in die Essensgepflogenheiten derer des Hauses Pickerton ein:

„Listen James ! – Zu jedem Dinner müssen Sie Kaviar reichen, wenn Sie keinen Brandy ausschenken; wenn Sie Brandy ausschenken und zum Dinner auch Kaviar anbieten, dürfen Sie keinen Lachs servieren; wenn es aber Lachs gibt oder wenn kein Brandy gereicht wird, so darf es keinen Kaviar geben ! – Can you manage that, James ?“
„I'll do my very best, Mylady!“ entgegnet James und denkt sich im Stillen: *„Versoffene Bande ! Aber Geschmack haben sie sonst schon. “*

Können Sie sich die Gedanken von James erklären ?