TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

7. Hausaufgabe, Abgabe: 13.12.2006

1. Beweisen Sie Lemma IV.7: (4 P.)

   Sei $F_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & f_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & f_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix}$ eine Frobeniusmatrix,

   $P_{\ell j}$ eine Permutationsmatrix. Dann gilt für $i < \ell \leq j$:

   (a) $P_{\ell j} F_i = \tilde{F}_i P_{\ell j}$ mit $\tilde{F}_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \tilde{f}_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \tilde{f}_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $F_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -f_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -f_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix}$

2. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für quadratische Matrizen $A \in K^{n,n}$. (3 P.)

   (a) A ist invertierbar.

   (b) Es gibt ein $B \in K^{n,n}$ mit $A \cdot B = I$.

   (c) Es gibt ein $\tilde{B} \in K^{n,n}$ mit $\tilde{B} \cdot A = I$.

   (d) $\text{Rang}(A) = n$.

   (e) $\text{Rang}(A^\top) = n$.

3. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme (in $\mathbb{R}$). (6 P.)

   a) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

   b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$

   d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

   e) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

   f) in $\mathbb{Z}_2$: $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

4. Bestimmen Sie mittels Gauß-Elimination (und ohne Taschenrechner) eine LR-Zerlegung $A = L \cdot R$ für die Koeffizientenmatrix des folgenden linearen Gleichungssystems $Ax = f$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Für welche reellen Zahlen a ist die Matrix A invertierbar?
Geben Sie reelle Zahlen a und b an, so dass das Gleichungssystem

(a) eine eindeutige Lösung,

(b) mehr als eine Lösung,

(c) gar keine Lösung besitzt.

Berechnen Sie alle Lösungen für die ersten beiden Fälle. (6 P.)

Zusatzfrage:
Wie lauten die Antworten (a-c) für eine gleichartige Matrix $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ mit $f = b \cdot e_{100} \in \mathbb{R}^{100}$? (+1 P.)