**TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik** **WS 2006/2007**
**Prof. Dr. P. Benner**

# Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

## 5. Hausaufgabe, Abgabe: 29.11.2006

1. Berechnen Sie – falls möglich – die Produkte $x^\top y$, $y^\top x$, $xy^\top$, $yx^\top$. (6 P.)

   (a) $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   (b) $x = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}^\top$, $y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^\top$

   (c) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. Berechnen Sie zu folgenden Matrizen die Inverse, falls diese existiert: (8 P.)

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{2,2}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{2,2}.$

3. Gegeben sei die folgende Matrix über der Menge $\mathcal{R}$ der rationalen Funktionen

$$\begin{bmatrix} \frac{x+1}{x-1} & \frac{x-1}{x^2} \\ \frac{x^2}{x+1} & \frac{x-1}{x+1} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2,2} \qquad \mathcal{R} = \left\{ r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \mid p, q \in \mathcal{P},\ q \neq 0 \right\},$$

   $(\mathcal{P} = \{p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}_0\})$
   Berechnen Sie hierzu die inverse Matrix. (4 P.)

   **Hinweis:** Es spielt keine Rolle, ob $q(x)$ auch mal für <u>ein</u> $x$ gleich Null ist.

4. Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Invertierung einer unteren Dreiecksmatrix (3 P.)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

5. Zeigen Sie, dass die folgende Menge $M$ von $2 \times 2$-Matrizen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. Ist diese Gruppe auch kommutativ? (5 P.)

$$M = \left\{ A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},\ \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. Gegeben sei die obere Blockdreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, deren Diagonalblöcke invertierbare Matrizen $A_{11}, A_{22}$ sind.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{k,k},\ A_{22} \in \mathbb{R}^{n-k,n-k},\ A_{12} \in \mathbb{R}^{k,n-k}$$

   Zeigen Sie: (3 P.)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$