TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

3. Hausaufgabe, Abgabe: 8.11.2006

1. Sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung ($f \subset X \times Y$), $f(A)$ bezeichnet das Bild von $A \subset X$ und $f^{(-1)}(A')$ das Urbild von $A' \subset Y$. (8 P.)

   (a) Zeigen Sie: Aus $A' \subset B' \subset Y$ folgt $f^{(-1)}(A') \subset f^{(-1)}(B')$.

   (b) Überprüfen Sie folgende Inklusionen:

   $$\begin{array}{rcll} f(f^{(-1)}(A')) & \supset & A', & (A' \subset f(X) \subset Y) \\ f^{(-1)}(f(A)) & \supset & A, & (A \subset f^{(-1)}(Y) \subset X)\,. \end{array}$$

   Prüfen Sie, ob die Gleichheit gilt (oder finden Sie je ein Gegenbeispiel).

   (c) Folgt aus $f^{(-1)}(A') = \emptyset$, dass $A' = \emptyset$?

   (d) Zeigen Sie $f^{(-1)}(A' \cap B') = f^{(-1)}(A') \cap f^{(-1)}(B')$, wenn f eine eindeutige Abbildung (Funktion) ist.
   Welche Beziehung gilt, wenn f nicht eindeutig ist?

2. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \to B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind. Geben Sie gegebenenfalls Einschränkungen A', B' an, so dass $f : A' \to B'$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B' \to A'$. (8 P.)

   $$\begin{array}{rll} \text{a)} & A = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\},\ B = \mathbb{R}, & f(x) = \tan x \\ \text{b)} & A = B = \mathbb{N}, & f(n) = n^2 \\ \text{c)} & A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{Q}, & f(n) = \frac{1}{n} \\ \text{d)} & A = B = \mathbb{R}, & f(x) = |2x - 4| \end{array}$$

3. Es sei $(M, \circ)$ eine Halbgruppe mit dem neutralen Element e. Man beweise: Gibt es zu einem $u \in M$ Elemente $x, y \in M$, für die $x \circ u = u \circ y = e$ gilt, so ist $x = y$. (3 P.)

4. In einer Menge $M = \{a, b, c\}$ werden folgende Operationen festgelegt:

   $$\begin{array}{c|ccc} \circ & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & a & b & c \\ c & a & b & c \end{array}\,, \qquad \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}\,, \qquad \begin{array}{c|ccc} \odot & a & b & c \\ \hline a & b & a & c \\ b & c & b & a \\ c & a & c & b \end{array}\,.$$

   (a) Welche Halbgruppeneigenschaften sind jeweils erfüllt bzw. nicht erfüllt?
   Bildet M mit einer der Operationen eine Gruppe?

   (b) Gibt es eine (oder mehrere) andere Multiplikationstabelle(n), so dass $(M, \bullet)$ eine Gruppe ist? (5 P.)