Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Hier: V sei $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$, d.h. wir betrachten Abbildungen auf Euklidischen oder unitären Vektorräumen.

Definition:

$f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **orthogonal** bzw. **unitär**, falls

$$\langle\, f(v), f(w)\,\rangle = \langle\, v, w\,\rangle \quad \forall v, w \in V.$$

Eigenschaften:

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal bzw. unitär. Dann:

a) (i) Matrixdarstellungen F von f bzgl. ONB sind orthogonal ($F^T F = I$) bzw. unitär ($F^H F = I$).

(ii) Orthogonale bzw. unitäre Matrizen induzieren orthogonale bzw. unitäre Endomorphismen.

b) f ist injektiv (bijektiv) und f^{-1} orthogonal bzw. unitär.

c) $\lambda \in \Lambda(f) \Longrightarrow |\lambda| = 1$.

d) Für die induzierte Norm gilt $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$.

e) In Euklidischen Vektorräumen sind die orthogonalen Endomorphismen genau die Abbildungen $f : V \to V$ mit $f(0) = 0$ und

$$\|v - w\| = \|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| \quad \forall\, v, w \in V.$$

f) Unitäre Endomorphismen sind diagonalisierbar, orthogonale Endomorphismen sind Block-diagonalisierbar mit Diagonalblöcken $[1], [-1], \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ mit $c^2 + s^2 = 1$, $s \neq 0$.

Matrixgruppen:

$\mathcal{U}(n) = \{U \in \mathbb{C}^{n\times n} \,|\, U \text{ unitär}\}$ heißt **unitäre Gruppe.**

$\mathcal{O}(n) = \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, Q \text{ orthogonal}\}$ heißt **orthogonale Gruppe.**

$\mathcal{SO}(n) = \{Q \in \mathcal{O}(n) \,|\, \det(Q) = 1\}$ heißt **spezielle orthogonale Gruppe.**