Normale Endomorphismen und Matrizen

Hier: V sei endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, .\,,\, .\, \rangle$, d.h. wir betrachten Abbildungen auf Euklidischen oder unitären Vektorräumen.

Definition:

$f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **normal**, falls

$$f \circ f^{ad} = f^{ad} \circ f.$$

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **normal**, falls

$$AA^T = A^T A \text{ für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad AA^H = A^H A \text{ für } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Eigenschaften:

- Orthogonale, unitäre und selbstadjungierte $f \in \mathrm{End}(V)$ sind normal.
- $f \in \mathrm{End}(V)$ normal $\Longrightarrow$

$$\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^{ad}), \qquad E_f(\lambda) = E_{f^{ad}}(\overline{\lambda})\ \forall \lambda \in \Lambda\,(A).$$

Charakterisierung:

- $f \in \mathrm{End}(V)$ normal $\Longleftrightarrow$ f ist unitär diagonalisierbar.
- $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ normal $\Longleftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(n) :\ U^H A U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
  D.h., die Schursche Normalform von A (in $\mathbb{C}$) ist diagonal!