Sylvesterscher Trägheitssatz

(Semi-)definite Bilinearformen:

Eine symmetrische Bilinearform

$$\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$$

heißt **positiv (negativ) definit**, falls $\varphi(v, v) > 0$ ($\varphi(v, v) < 0$) für alle $v \in V \setminus \{0\}$ und **positiv (negativ) semidefinit**, falls $\varphi(v, v) \geq 0$ ($\varphi(v, v) \leq 0$) für alle $v \in V$.

Bezeichnungen: $\varphi(v, v) >, <, \geq, \leq 0$.

Ist $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrixdarstellung von φ, dann gilt für $\varphi(v, v) >\ (<, \geq, \leq)\ 0$, daß $\Lambda(A) \subset \mathbb{R}^+ (\mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^-)$.

Sylvesterscher Trägheitssatz:

Sei V Euklidischer Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$ und

$$\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$$

eine symmetrische Bilinearform. Sind $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basen von V und A_1, A_2 die Matrixdarstellungen von φ bzgl. dieser Basen, dann gilt:

$$\pi_1 = \pi_2, \quad \nu_1 = \nu_2, \quad \omega_1 = \omega_2, \quad \mathrm{Rang}(A_1) = \mathrm{Rang}(A_2) = \pi_1 + \nu_1,$$

wobei (π_k, ν_k, ω_k) die Anzahl der positiven, negativen Eigenwerte bzw. der Null-Eigenwerte von A_k, $k = 1, 2$ bezeichnet.

Da die Anzahlen der positiven, negativen und Null-Eigenwerte also basisunabhängig und damit Invarianten von φ sind, bezeichnet man diese mit (π, ν, ω). Dieses Tripel heißt der **Trägheitsindex** von φ.

Für symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ergibt sich folgende Aussage: *Kongruente Matrizen haben den selben Trägheitsindex.*

Normalform bzgl. Kongruenz/Hauptachsentransformation:

Sei V Euklidischer Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$ und

$$\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$$

eine symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine Basis von V, so daß die zugehörige Matrixdarstellung von φ die Form

$$D = I_\pi \oplus -I_\nu \oplus 0_\omega$$

hat.

Für symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ergibt sich folgende Aussage: *A mit Trägheitsindex (π, ν, ω) ist kongruent zu $I_\pi \oplus -I_\nu \oplus 0_\omega$.*