Skalarprodukt und Norm

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Skalarprodukt

Abbildung $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, die folgende Eigenschaften hat:

(S1) $\forall w \in V$ ist $\langle\, .\, , w\rangle : V \to \mathbb{K}$ lineare Abbildung, d.h.,

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w\rangle = \alpha\langle v_1, w\rangle + \beta\langle v_2, w\rangle \quad \forall v_1, v_2 \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

(S2) (Symmetrie)

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle} \qquad \forall v, w \in V.$$

(S3) (positive Definitheit)

$$\langle v, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \qquad \text{und} \qquad \langle v, v\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0.$$

Eigenschaften:

- $\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle} \quad \Longrightarrow \quad \langle v, v\rangle \in \mathbb{R}.$
- $\forall v \in V$ gilt:

  $$\langle v, \alpha w_1 + \beta w_2\rangle = \overline{\alpha}\langle v, w_1\rangle + \overline{\beta}\langle v, w_2\rangle \quad \forall w_1, w_2 \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

- $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt heißt **Euklidischer** bzw. **unitärer Raum**.

Norm

Abbildung $\| \,.\, \| : V \to \mathbb{R}$, so daß $\forall v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(N1) $\|v\| = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0.$

(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\|.$

(N3) (Dreiecksungleichung) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$

$\mathbb{K}$-Vektorraum mit Norm heißt **normierter Raum**.

Eigenschaften:

(N4) $\|v\| \geq 0 \;\; \forall\, v \in V.$

Induzierte Norm:

Für jedes Skalarprodukt definiert $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ eine Norm auf V.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle \, \langle w, w\rangle$$

bzw. für induzierte Norm

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\|.$$

Winkel zwischen $v, w \in V \setminus \{0\}$ ($\| \,.\, \|$ =induzierte Norm):

$$\varphi(v, w) = \arccos \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}.$$