Ringe und Körper

Definition (Ring): Sei R eine Menge mit einer additiven Verknüpfung "+" und einer multiplikativen Verknüpfung "·",

$$\begin{array}{cll} + & : R \times R \to R & : (a,b) \to a+b, \\ \cdot & : R \times R \to R & : (a,b) \to a \cdot b. \end{array}$$

Dann heißt $(R,+,\cdot)$ Ring, falls gilt:

i) $(R,+)$ ist Abelsche Gruppe,

ii) $(R,\cdot)$ ist Halbgruppe,

iii) es gelten die Distributivgesetze

$$\begin{array}{rcl} a \cdot (b+c) & = & a \cdot b + a \cdot c, \\ (a+b) \cdot c & = & a \cdot c + b \cdot c, \end{array} \qquad \forall\, a,b,c \in R.$$

Erfüllt $(R,\cdot)$ (G2) ("Einselement"), dann heißt $(R,+,\cdot)$ Ring mit Einselement (kurz: Ring mit 1).
Erfüllt $(R,\cdot)$ (G4) ("Kommutativgesetz"), dann heißt $(R,+,\cdot)$ kommutativer Ring.

Definition (Körper): Sei $(R,+,\cdot)$ kommutativer Ring mit Einselement. Gilt außerdem:

i) "$0 \neq 1$", d.h., die neutralen Elemente der Addition und Multiplikation sind verschieden,

ii) $\forall\, r \in R^\star = R \setminus \{0\}$ existiert das inverse Element r^{-1}.

Dann heißt $(R,+,\cdot)$ Körper.