Matrix-Kalkül

Es sei $(R, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Einselement.

Definition: *$n \times m$-Matrix ((n, m)-Matrix)*

$$\begin{aligned} A &:= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix} =: [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \\ R^{n\times m} &:= \{A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \,|\, a_{ij} \in R\ \forall i, j\}. \end{aligned}$$

Gleichheit für $A \in R^{n\times m}, B \in R^{p\times q}$:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad \text{“}n = p\ \wedge\ m = q\ \wedge\ a_{ij} = b_{ij}\ \forall i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\text{''}$$

Matrixaddition für $A, B \in R^{n\times m}$:

$$C := A + B, \qquad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$$

Regeln: ($A, B, C \in R^{n\times m}$ beliebig)

1. *Assoziativgesetz:* $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. *Kommutativgesetz:* $A + B = B + A$
3. *neutrales Element:* $A + 0 = A = 0 + A \quad$ ($0 \in R^{n\times m}$ Nullmatrix)

skalare Multiplikation für $A \in R^{n\times m}$, $\alpha \in R$:

$$C := \alpha \cdot A, \qquad c_{ij} := \alpha \cdot a_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$$

Regeln: ($A, B \in R^{n\times m}$, $\alpha, \beta \in R$ beliebig)

1. $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) = \beta \cdot (\alpha \cdot A)$
2. *1. Distributivgesetz:* $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
3. *2. Distributivgesetz:* $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
4. Spezialfälle:
   - $\alpha = 1$: $1 \cdot A = A$ (1 ist *neutrales Element* bzgl. skalarer Multiplikation)
   - $\alpha = -1$: Definiere $-A := (-1) \cdot A = [-a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m}$
     ($-A$ ist *inverses Element* bzgl. Matrixaddition: $A + (-A) = 0 \in R^{n\times m}$.)
   - $\alpha = 0$: $0 \cdot A = 0 \in R^{n\times m}$.

Transposition für $A \in R^{n\times m}$:

$$B = A^T \iff b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n.$$

Beachte: – $A^T \in R^{m\times n}$.
– Falls $A = A^T$, dann heißt A *symmetrisch*.

Regeln: ($A, B \in R^{n\times m}$, $\alpha \in R$ beliebig)

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
3. $(A^T)^T = A$

Matrixmultiplikation für $A \in R^{n\times m}, B \in R^{m\times p}$:

$$C := A \cdot B \quad c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \forall i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,p.$$

Beachte: $C \in R^{n\times p}$.

Kompatibilitätsbedingung:
Die Anzahl der Spalten von A und der Zeilen von B muß identisch sein!

Regeln: ($A \in R^{n\times m}, B \in R^{m\times p}$ beliebig)

1. *Assoziativgesetz:* $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ($\forall\, C \in R^{p\times r}$)
2. *1. Distributivgesetz:* $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ ($\forall\, C \in R^{m\times p}$)
3. *2. Distributivgesetz:* $(A + C) \cdot B = A \cdot B + C \cdot B$ ($\forall\, C \in R^{n\times m}$)
4. *neutrales Element:* $A \cdot I_m = A = I_n \cdot A$
   ($I_n \in R^{n\times n}$, $I_m \in R^{m\times m}$ sind neutrale Elemente der Matrixmultiplikation)

Das **Kommutativgesetz** gilt i.a. nicht! I.d.R. $A \cdot B \neq B \cdot A$.