Lineare Abbildungen und Matrizen

Sind V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, also f ein (Vektorraum-)Homomorphismus, $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, dann gelten folgende Aussagen.

- Zunächst für $V = \mathbb{K}^m, W = \mathbb{K}^n$:

  $$\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) = \{f_A : x \to Ax \mid A \in \mathbb{K}^{n\times m}\},$$

  d.h. zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ existiert (bei gegebenen Basen) genau ein $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit $f(x) = Ax$. A heißt dann **Matrixdarstellung** von f.

  Beachte: A hängt von der gewählten Basis ab!

- Die obige Aussage gilt sinngemäß für beliebige V, W, wenn man dort Basen festlegt: Ist $\alpha \in \mathbb{K}^m$ der Koordinatenvektor von $x \in V$ und $\beta \in \mathbb{K}^n$ der Koordinatenvektor von $f(x) \in W$, dann gibt es genau $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit $\beta = A\alpha$.

- Sei A die Matrixdarstellung von $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ bzgl. zweier gegebener Basen $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ in V und W und seien P und Q Basiswechselmatrizen für den Übergang von $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ zu neuen Basen $\tilde{\mathcal{B}}_V$ bzw. $\tilde{\mathcal{B}}_W$, dann gilt für die Matrixdarstellung $\tilde{A}$ von f bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}_V$ bzw. $\tilde{\mathcal{B}}_W$:

  $$\tilde{A} = QAP^{-1}.$$

- **Definition:** Sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$.
  1. **Kern** bzw. **Nullraum** (engl. **kernel**, **nullspace**):
     $\text{Kern}(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$,
     $\text{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{K}^m \mid Ax = 0\}$.
  2. **Bild** (engl. **range**):
     $\text{Bild}(f) = \{y \in W \mid \exists\, x \in V \text{ mit } f(x) = y\}$,
     $\text{Bild}(A) = \{y \in \mathbb{K}^n \mid \exists\, x \in \mathbb{K}^m \text{ mit } Ax = y\}$.

  Beachte: Kern und Bild sind jeweils Unterräume von V bzw. W. Es gilt:

  i) f injektiv $\Longleftrightarrow \text{Kern}(f) = \{0\}$.

  ii) $\text{Rang}(A) = m \Longleftrightarrow \text{Kern}(A) = \{0\}$.

  iii) $\{z \in V \mid f(x) = f(z)\} = \{v\} + \text{Kern}(f) \equiv v + \text{Kern}(f)$.

  iv) $\dim\{V\} = \underbrace{\dim\{\text{Bild}(f)\}}_{=\text{Rang}(f)} + \dim\{\text{Kern}(f)\}$.

  Weiter folgt für gegebene Basen $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ in V und W: Die Abbildung

  $$\text{mat} : \text{Hom}(V, W) \to \mathbb{K}^{n \times m} : f \to A,$$

  wobei A die Matrixdarstellung von f bzgl. $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ ist, ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

- **Definition:** Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, der zugleich ein Ring mit 1 ist und dessen (Ring-)Produkt bilinear ist, heißt **Algebra**.

  Beispiele: $\text{End}(V)$ mit $f \circ g$, $\mathbb{K}^{n \times n}$ mit Matrixmultiplikation.