Die Jordansche Normalform

Camille Jordan (1838-1922)

Jordansche Normalform:

Sei V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ mit k verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Zerfällt das charakteristische Polynom von $\mathcal{A}$ in Linearfaktoren,

$$p_{\mathcal{A}}(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{r_j} \quad \text{mit } r_j = \mu(\lambda_j),$$

dann hat $\mathcal{A}$ eine Matrixdarstellung $J \in \mathbb{K}^{n \times n}$ der Form

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{r_1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{r_k} + N_k \end{bmatrix} \equiv \bigoplus_{j=1}^{k} (\lambda_j I_{r_j} + N_j),$$

mit

$$N_j = \underbrace{J_{d_j} \oplus \cdots \oplus J_{d_j}}_{s_{d_j}^{(j)}\text{-mal}} \oplus \underbrace{J_{d_j-1} \oplus \cdots \oplus J_{d_j-1}}_{s_{d_j-1}^{(j)}\text{-mal}} \oplus \cdots \oplus \underbrace{J_1 \oplus \cdots \oplus J_1}_{s_1^{(j)}\text{-mal}}$$

und

$$J_\ell = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{\ell \times \ell}.$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \mu(\lambda_j) &\geq \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid N_j^\ell = 0\} = d_j \geq 1, \\ \nu(\lambda_j) &= \sum_{i=1}^{d_j} s_i^{(j)}, \qquad n = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\sum_{i=1}^{d_j} i s_i^{(j)}}_{=\mu(\lambda_j)}, \\ m_{\mathcal{A}}(x) &= (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_k)^{d_k}. \end{aligned}$$

Die Zahlen $\mu(\lambda_j), \nu(\lambda_j), d_j, s_1^{(j)}, \ldots, s_{d_j}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$, sind Invarianten von $\mathcal{A}$ bzgl. Ähnlichkeit, d.h., sie sind konstant für alle $A \in [\mathcal{A}]$.

J heißt **Jordansche Normalform** von $\mathcal{A}$, $\lambda_j I_m + J_m$ **Jordanblock der Länge** m **zu** λ_j.