Gruppen

Definition: Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$, bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung (Komposition) auf G, d.h. einer Abbildung

$$\circ : G \times G \to G : (a, b) \to a \circ b,$$

welches

(G0) $a \circ b \in G$, d.h. G ist abgeschlossen unter der Verknüpfung "$\circ$" (bzw., die Verknüpfung "$\circ$" ist auf G wohldefiniert),

sowie die Gruppenaxiome

(G1) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz)

(G2) $\exists e \in G$ mit $e \circ a = a \quad \forall a \in G$ (Existenz eines (links–) neutralen Elements)

(G3) $\forall a \in G\ \exists a' \in G$ mit $a' \circ a = e$ (Existenz des (links–) inversen Elements)

erfüllt.

Eine Gruppe heißt Abelsch[1] (kommutativ), falls außerdem gilt:

(G4) $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$ (Kommutativgesetz).

Erfüllt $(G, \circ)$ nur (G0) und (G1), so heißt $(G, \circ)$ Halbgruppe.

Bemerkung:

a) Oft schreibt man kurz G statt $(G, \circ)$ und $a\,b$ statt $a \circ b$, falls klar ist, um welche Verknüpfung es sich handelt.

b) Steht $\circ$ für eine Verknüpfung $+$, die der Addition zweier Zahlen nachempfunden ist, so heißt $(G, +)$ additive Gruppe, e heißt dann Nullelement und das inverse Element bezeichnet man mit $a' = -a$.

c) Steht $\circ$ für eine multiplikative Verknüpfung $\cdot$, so heißt $(G, \cdot)$ multiplikative Gruppe, e heißt dann Einselement und das inverse Element bezeichnet man mit $a' = a^{-1}$.

[1] nach Niels Henrik Abel (1802 - 1829), siehe http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Abel.html