Eigenwerte

Sei V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{A} : V \to V$ eine lineare Abbildung, also $\mathcal{A}$ ein (Vektorraum-)Endomorphismus, $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$, und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix(darstellung von $\mathcal{A}$).

Definition:

$\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von $\mathcal{A}$ bzw. A mit zugehörigem Eigenvektor $x \in \mathbb{K}^n$, falls gilt

$$\mathcal{A}(x) = \lambda x \quad \text{bzw.} \quad Ax = \lambda x \quad \text{und} \quad x \neq 0.$$

Menge aller Eigenwerte von $\mathcal{A}$ bzw. A: $\Lambda(\mathcal{A})$ bzw. $\Lambda(A)$.

Charakteristisches Polynom:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

λ Eigenwert von $A \iff \lambda$ Nullstelle von p_A.

Beachte: Für $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ definiere $p_{\mathcal{A}} = p_A$, wobei A beliebige Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$, denn

$$A \sim B, \text{ d.h. } A = S^{-1}BS \quad \Rightarrow \quad p_A = p_B.$$

Spur:

$$\mathrm{tr}(A) \equiv \mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Begleitmatrix:

$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n \quad \leftrightarrow \quad A_p = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -\alpha_2 \\ & & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

Satz von Cayley-Hamilton:

$$p_A(A) = 0.$$