Dualität

Sei V $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition:

Der Vektorraum

$$V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K}) = \{\alpha : V \to \mathbb{K}\}$$

heißt **Dualraum** von V, seine Elemente $\alpha \in V^*$ **Linearformen**.

Beispiele: Für eine Bilinearform $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ sind die Abbildungen $\varphi_w : V \to \mathbb{K} : v \to \varphi(v, w)$, $\varphi_v : V \to \mathbb{K} : w \to \varphi(v, w)$ Linearformen auf V.

Duale Basis:

Für jede Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V existiert eine **duale Basis** $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$, deren Elemente eindeutig über die Eigenschaft

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n$$

bestimmt sind.

V und V^* sind isomorph vermöge des Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \to V^* : v_i \to v_i^*.$$

Annullator:

Sei $U \subset V$ Unterraum, dann heißt

$$U^0 = \{\varphi \in V^* \,|\, \varphi(u) = 0 \;\forall\, u \in U\}$$

der **Annullator von** U (oder der **zu** U **orthogonale Raum**).

I.a. ist der Annullator nicht gleich dem orthogonalen Komplement (beachte: $U^0 \subset V^*$, aber $U^\perp \subset V$), aber er kann als Verallgemeinerung von $U^\perp$ für Vektorräume, in denen kein Skalarprodukt definiert ist, aufgefaßt werden.

Es gilt: $\dim U^0 = \dim V - \dim U$.

Duale Abbildung:

Für $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt

$$f^* : W^* \to V^* : \psi \to f^*(\psi) = \psi \circ f$$

die **zu f duale Abbildung**.

Dadurch ist ein Vektorraum-Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$$

gegeben.

Ist A die Matrixdarstellung von f bzgl. gegebener Basen, dann hat f^* bzgl. der zu den gegebenen Basen dualen Basen die Matrixdarstellung A^T.

Weiter gilt:

$$\mathrm{Bild}(f^*) = (\mathrm{Kern}(f))^0, \quad \mathrm{Kern}(f^*) = (\mathrm{Bild}(f))^0.$$

Daraus folgt $\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(f^*)$ und für die Matrixdarstellungen entsprechend $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^T)$.

Bidualraum:

Definiert durch

$$V^{**} = (V^*)^* \equiv \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{K}).$$

Der Bidualraum von V ist isomorph zu V, man kann also jedes $v \in V$ exakt durch eine Linearform v^{**} auf V^* identifizieren.

Schreibweise (für $\varphi \in V^*$):

$$v^{**}(\varphi) \equiv v(\varphi) \equiv \varphi(v).$$

Für lineare Abbildungen $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ folgt damit $f = f^{**}$.