2 Koordinatensysteme

2.1 Affine Koordinaten

Ein Koordinatensystem dient als Bezugssystem für Darstellung von Punkten und Vektoren (Grundobjekte der analytischen Geometrie).

Allgemeine Definition und Eigenschaften

- $[X, T(X)] \overset{\text{def}}{=}$ „affiner Raum", bestehend aus
  $X \; = \;$ Menge von Punkten
  $T(X) \; = \;$ Menge von Translationen auf X
  Punkte $P, Q, R, \ldots \in X$
  Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \ldots \in T(X)$
- $\forall\, P, Q \in X \quad \exists\; \vec{v} \in T(X) : \quad Q = P + \vec{v}$
  $\forall\, P \in X, \forall\, \vec{v} \in T(X) \quad \exists\; Q \in X : \quad Q = P + \vec{v}$
- $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} \overset{\text{def}}{=} Q - P$
- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
- $\overrightarrow{PP} = O$ (Nullvektor)
- $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Als ***Koordinatenursprung*** wird ein Punkt $\boldsymbol{O} \in \boldsymbol{X}$ ausgezeichnet:

$$P \in X \quad \Rightarrow \quad P = O + \overrightarrow{OP}\,, \qquad \overrightarrow{OP} \in T(X)$$

$$\text{„}P + Q = R\text{"} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$$

Wahl einer Basis in T(X): $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$

Koordinatensystem: $(O, B) = (O, \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\})$

Affine Koordinaten:

$$\begin{array}{llll} \forall\, \vec{v} \in T(X): & \vec{v} & = \sum_j v_j \cdot \vec{u}_j\,, & v_j \in \mathbb{R} \\ \forall\, P \in X: & P & = O + \sum_j p_j \cdot \vec{u}_j\,, & p_j \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{Vektorkoordinaten:} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \leftrightarrow \quad \vec{v} \in T(X)$$

$$\text{Punktkoordinaten:} \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \leftrightarrow \quad P \in X$$

Kartesische Koordinaten im $\mathbb{R}^3$:

$$\left(O, \left\{\vec{\mathfrak{i}}, \vec{\mathfrak{j}}, \vec{\mathfrak{k}}\right\}\right) : \left.\begin{array}{ccccccc} \vec{\mathfrak{i}} \cdot \vec{\mathfrak{j}} & = & \vec{\mathfrak{i}} \cdot \vec{\mathfrak{k}} & = & \vec{\mathfrak{j}} \cdot \vec{\mathfrak{k}} & = & 0 \\ \vec{\mathfrak{i}} \cdot \vec{\mathfrak{i}} & = & \vec{\mathfrak{j}} \cdot \vec{\mathfrak{j}} & = & \vec{\mathfrak{k}} \cdot \vec{\mathfrak{k}} & = & 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad \text{Orthonormalsystem}$$

$$\vec{\mathfrak{i}} \leftrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathfrak{j}} \leftrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathfrak{k}} \leftrightarrow e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Homogene Koordinaten

Homogene Gleichungen sind solche Gleichungen, deren Lösungsmenge sich nicht ändert, wenn jede Gleichungsvariable durch ihr λ-faches ersetzt wird ($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$).

Betrachten wir z. B. die Ebenengleichung $ax + by + cz + d = 0$ mit den Gleichungsvariablen x, y, z. Durch Einführung einer zusätzlichen Variablen w entsteht die homogene Gleichung

$$ax + by + cz + dw = 0$$

mit den Gleichungsvariablen x, y, z, w. Für jede Lösung

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad w \neq 0 \quad \text{ist auch} \quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w}x' \\ \frac{1}{w}y' \\ \frac{1}{w}z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung dieser homogenen Gleichung. Die Ebenengleichung kann somit auch mit dem Skalarprodukt formuliert werden:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

Ein <u>Punkt</u> P mit den affinen Koordinaten (x, y, z) besitzt die <u>***homogenen Koordinaten***</u> $(x, y, z, 1)$ bzw. (wx, wy, wz, w) mit $w \neq 0$.

Die folgende „Rechnung“ ist i.a. für homogene Koordinaten **nicht** definiert:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix},$$

lässt sich hier aber so interpretieren: Differenz der affinen Koordinaten zweier Punkte (innerhalb der Ebene $w = 1$, die der Punktmenge X aus 2.1 entspricht) liefert eine Richtung (Ebene $w = 0$).

Bei der Darstellung von <u>Richtungsvektoren</u> in homogenen Koordinaten ist $w = 0$.

Anmerkungen:

- Ein „Punkt“ mit den homogenen Koordinaten $(x, y, z, 0)$ besitzt keine affinen Koordinaten. Die Betrachtung als Grenzwert liefert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  d. h. ein Vektor kann aufgefasst werden als ein *unendlich ferner Punkt* in der entsprechenden Richtung.

- In der *projektiven Geometrie* werden *homogene Kooordinaten* in einem n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_n$ als die Richtungsvektoren der *1-dimensionalen Unterräume* des $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert: $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1})^\top \neq 0$.
  Die **Punkte** $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ können in diesen projektiven Raum eingebettet werden, z.B. als Schnittpunkte der 1D-Unterräume mit der Hyperebene $x_{n+1} = 1$. Die **Richtungen** $\mathbb{R}\vec{x} \subset \mathbb{R}^n$ $(\vec{x} \neq 0)$ sind dann diejenigen 1D-Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$, die in der Hyperebene $x_{n+1} = 0$ liegen. (s.o.: $w = 1$ bzw. $w = 0$)