Mathematische Grundlagen der Computergeometrie

3. Übung: Transformationen und Projektionen

1. Gegeben ist ein Quader

$$Q = \left\{ p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 5,\ 2 \leq z \leq 10 \right\}.$$

   Bestimmen Sie die parallele Projektion des Quaders für einen Betrachter, der vom Punkt $P_B = (9, 10, 2)^\top$ aus in Richtung zum Punkt $P_O = (5, 2, 6)^\top$ auf die zu dieser Blickrichtung orthogonale Ebene schaut.
   Der Punkt P_O soll der Koordinatenursprung der Bildebene sein und die Projektion der ursprünglichen z-Achse soll im Bild nach oben zeigen.
   Geben Sie die Transformationsmatrix (für homogene Koordinaten) an!
   Bestimmen Sie die Koordinaten der Bildpunkte in der Projektionsebene und skizzieren Sie das Bild des Quaders.

2. Lösen Sie die vorangehende Aufgabe für den Fall einer Perspektivprojektion (mit gleicher Blickrichtung und Projektionsebene, Projektionszentrum in P_B)!

3. Gesucht ist das Bild einer perspektivischen Projektion des Einheitswürfels mit den Koordinaten $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 1$. Das Projektionszentrum liege im Punkt $(0, 0, -4)$.
   (d.h. Projektion aus Richtung der negativen z-Achse auf die yx-Ebene!)

4. Die folgenden Punkte seien die Eckpunkte eines Tetraeders:

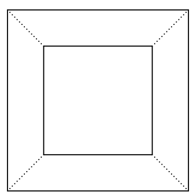
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   a) Führen Sie eine parallele Projektion des Tetraeders in Richtung der Kante $\overline{P_1P_2}$ auf die xy-Ebene aus! (Projektionsmatrix bestimmen)
   b) Skizzieren Sie das Bild der Projektion!
   c) Bestimmen Sie die Länge der Strecke $\overline{P_3P_4}$ im Original und in der Projektion!

5. Die perspektivische Projektion eines mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegenden Würfels mit der Kantenlänge $2c$, d.h.

$$-c \leq x, y, z \leq c,$$

   auf eine Ebene $z = 0$ liefert nebenstehendes Bild. Welchen Abstand Δz von der Projektionsebene muss der Betrachter haben, damit das innere Quadrat die Hälfte des Flächeninhalts des äußeren Quadrates besitzt?



   Zusatz:
   Wie ändert sich der Abstand Δz, wenn die Projektion auf eine Ebene $z = z_1$ ausgeführt werden soll? In welchem Punkt auf der z-Achse befindet sich dabei der Betrachter?