Mathematische Grundlagen der Computergeometrie

2. Übung: Koordinatentransformationen

1. Gesucht ist (in der Ebene) eine Transformationsmatrix, die mittels bekannter Elementartransformationen eine Strecke $\overline{P_1P_2}$ auf die Strecke $\overline{Q_1Q_2}$ abbildet.
Wie kann die Transformation so modifiziert werden, dass gleichzeitig eine Strecke $\overline{P_1P_3}$ auf $\overline{Q_1Q_3}$ abgebildet wird?

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ Q_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},\ Q_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},\ Q_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

2. Geben Sie die Koordinatentransformation an, die den Quader

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :\ 2 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 6,\ 10 \le z \le 50 \right\}$$

in den Einheitswürfel

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1 \right\}$$

abbildet.

3. Geben Sie die Koordinatentransformation (in der Ebene) an, die das Parallelogramm mit den Eckpunkten (1,2), (5,3), (2,10), (6,11) in das Einheitsquadrat abbildet.

4. a) Geben Sie die Transformationsmatrix an, die

1) das Koordinatensystem so verschiebt, dass der Punkt (2,1,2) zum neuen Koordinatenursprung wird;
2) alle Objekte in x-, y- bzw. z-Richtung entsprechend um einen Faktor 4, 2 bzw. 3 streckt;
3) anschließend eine Drehung des Koordinatensystems um 45° um die z-Achse ausführt.

b) Geben Sie die Koordinaten des Punktes $P = (3, 4, 5)^\top$ nach jedem der drei Transformationsschritte an.

5. Gegeben seien

- ein Zylinder, durch zwei Punkte P_1 und P_2 auf seiner Achse und den Radius r, sowie
- eine Ebene, durch einen Punkt P_0 mit dem Normalenvektor $\vec{n}$.

Die Ebene soll den (unendlich langen) Zylinder schneiden (nicht parallel zur Zylinderachse).
Geben Sie eine Koordinatentransformation an, durch die das Schnittgebilde in den Einheitskreis der xy-Ebene des neuen Koordinatensystems abgebildet wird. Die Abbildung soll umkehrbar sein (also keine Projektion)
Beispiel:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r = 1, \qquad P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$