Der vertikale Finanzausgleich in den Ländern -

Eine formal-analytische Kritik

Thomas Kuhn

Mai 2017

(Revised Dec. 2017, Preliminary Version, please do not quote!)

Abstract

Dieser Beitrag behandelt das Korridorverfahren im vertikalen Finanzausgleich der Länder. In diesem Verfahren wird die originäre Verteilung der Budgetdefizite der Kommunen auf einen engen Korridor gestutzt, der den effizienten Bereich der Bereitstellung lokaler öffentlicher Güter markieren soll. Der Erwartungswert der gestutzten Korridorverteilung dient sodann als Maß für den kommunalen Anteil im vertikalen Finanzausgleich. Dieses Verfahren weist eine Reihe von fundamentalen Schwächen auf, die in Kontrast zu seiner eigentlichen Intention stehen. Hierzu werden verschiedene Propositionen deduziert, deren Bedeutung für die Finanzpraxis vor allem darin liegt, dass sie für beliebige Verteilungen Gültigkeit besitzen und daher auf die Empirie unmittelbar anwendbar sind. Als ein wesentliches Resultat kann u. a. gezeigt werden, dass der Erwartungswert der Korridorverteilung sogar überproportional zum statistischen Durchschnitt steigt (sinkt), und damit der kommunale Anteil im vertikalen Finanzausgleich, wenn nur die Budgetdefizite der Kommunen innerhalb des Korridors zunehmen (abnehmen). Dadurch werden entgegen der Intention auch ineffiziente Kommunen außerhalb des Korridors bessergestellt, obgleich sich deren Budgets überhaupt nicht verändert haben.

**Thomas Kuhn,* Technische Universität Chemnitz, e-mail: t.kuhn@wirtschaft.tu-chemnitz.de

Einführung

In diesem Beitrag wird versucht, das im vertikalen Finanzausgleich von Ländern wie Hessen und Thüringen implementierte Korridorverfahren[1] auf seine impliziten Eigenschaften hin zu überprüfen, da eine solche Analyse unseres Wissens bislang noch nicht vorliegt. Beim Korridorverfahren handelt es sich um den Versuch, einen Mechanismus zu konzipieren, der ein geeignetes Maß für die durchschnittliche Finanzausstattung von Kommunen generieren kann und somit für den kommunalen Anteil im vertikalen Finanzausgleich eines Landes bestimmend sein soll. Grob gesprochen wird dabei die originäre Verteilung der kommunalen Pro-Kopf-Defizite auf einen engen Korridor transformiert, d.h. statistisch gestutzt. Das gewogene statistische Mittel dient als obere Grenze und das halbe gewogene statistische Mittel als untere Grenze des Korridors. Der Erwartungswert der gestutzten Korridorverteilung, mithin der transformierten Verteilung, gilt im vertikalen Finanzausgleich, von Spezifika einzelner Länder abgesehen, als Maß für die angemessene Finanzausstattung einer „durchschnittlichen" Kommune.

Diesem Vorgehen liegt die Vorstellung zugrunde, dem Gebot der Sparsamkeit und Wirtschaftlichkeit Geltung zu verschaffen und eine möglicherweise ineffiziente Mittelverausgabung der Kommunen kompensieren zu können. Dies betrifft sowohl Kommunen rechts außerhalb des Korridors, deren Mittelverausgabung als überdurchschnittlich hoch und somit als ineffizient betrachtet wird, als auch Kommunen links vom Korridor, deren Angebot öffentlicher Güter als zu gering eingeschätzt wird, und die daher der Alimentierung bedürfen, um mehr öffentliche Güter bereitstellen zu können. Die ineffizienten Kommunen sollen in der Logik des Korridorverfahrens nämlich stets höchstens den Durchschnitt erhalten, unabhängig davon, wie weit ihr eigenes Defizit über diesem Limit liegt, oder stets mindestens die Hälfte des Durchschnitts, unabhängig davon, wie weit ihr eigenes Defizit dieses Limit auch immer unterschreitet. Dies schließt insbesondere auch potentielle Ausreißer nach beiden Seiten ein.

Wie in der Literatur gezeigt wurde, führt dieses Verfahren in aller Regel zu einer beträchtlichen Reduktion der verfügbaren Finanzmittel der Kommunen relativ zur tatsächlichen Mittelverausgabung und könnte somit ein langfristiges Risiko für die kommunale Aufgabenerfüllung darstellen.[2] In diesem Beitrag soll es hingegen mehr um die Offenlegung der impliziten Eigenschaften des Verfahrens gehen. Von Interesse sind hierzu insbesondere die Effekte, die von einer Änderung der Defizite von Kommunen innerhalb und außerhalb des Korridors auf den Erwartungswert der Verteilung im Korridorverfahren ausgehen. Dazu wird das Korridorverfahren analytisch behandelt, wobei wir auf die in *Kuhn (2016)*, eingeführte Formalisierung dieses Verfahrens als Basis zurückgreifen können.

[1] Zum Korridorverfahren vgl. z. B. *Färber* (2012); *Lamouroux* (2016).
[2] S. *Kuhn* (2016).

Es werden grundsätzlich stets zwei Situationen miteinander verglichen: Die Anfangssituation der originären Verteilung der kommunalen Pro-Kopf-Defizite, mit einer Vergleichssituation, die die Verteilung repräsentiert, die sich aus den angenommenen Änderungen der kommunalen Pro-Kopf-Defizite ergibt. In beiden Situationen wird das Korridorverfahren in die jeweilige Verteilung implementiert, indem Kommunen in aufsteigender Reihenfolge sortiert und in den Korridor gruppiert werden, woraus wiederum die jeweils auf den Korridor gestutzte Verteilung entsteht. Betrachtet werden c. p. der Reihe nach Änderungen bei den Kommunen links außerhalb des Korridors, rechts außerhalb des Korridors und innerhalb des Korridors, sowie in allen Fällen die davon ausgehenden Effekte auf den Erwartungswert der Korridorverteilung als Maß für die angemessene kommunale Finanzausstattung.

Wir nehmen dazu auf stilisierte Fakten Bezug, die eine gute Vorstellung davon vermitteln, wie das Korridorverfahren auf Änderungen in der Verteilung der kommunalen Defizite jeweils reagieren sollte und ob es den Intentionen auch wirklich entspricht. Nach der dem Korridorverfahren zugrundeliegenden Logik ist eine Forderung die, dass die angemessene Finanzausstattung von Kommunen nicht von den Defiziten ineffizienter Kommunen außerhalb des Korridors abhängig sein soll. Demnach dürfte sich das durchschnittliche Defizit nicht ändern, wenn sich die Defizite nur der als ineffizient geltenden Kommunen außerhalb des Korridors ändern, nicht aber die der Kommunen innerhalb des Korridors. Dies ist nicht zuletzt der Grund dafür, warum die originäre Verteilung der kommunalen Defizite auf den Korridor transformiert wird, um sie vermeintlich auf den effizienten Bereich zu beschränken.

Abgesehen von der von Frage, ob diese Vorstellung von Effizienz überhaupt plausibel ist und Sinn ergibt[3], ist zweifelhaft, ob das Korridorverfahren die geforderten Eigenschaften auch tatsächlich besitzt, oder ob es nicht ganz andere als die gewünschten Effekte erzeugt. Und wie sehen gegebenenfalls die Resultate aus? Generell ist als ein wesentliches Ergebnis zu konstatieren, dass das Korridorverfahren kaum eine Forderung erfüllt, die seiner ursprünglichen Intention entspricht. Im Gegenteil, seine konkrete Konzeption impliziert in nahezu allen Fällen konträre Effekte, macht man die in der Finanzpraxis vorherrschende Logik zum Maßstab.

Im Beitrag gehen wir wie folgt vor. Zunächst wird das Korridorverfahren beschrieben und formalisiert. Wir betrachten danach in dieser Reihenfolge Budgetänderungen von Kommunen links außerhalb, rechts außerhalb und innerhalb des Korridors, sowie von Kommunen, die als Ausreißer gelten. Daran schließt sich eine Diskussion der Implikationen für die Finanzpraxis an. Mit einigen Schlussbemerkungen endet der Beitrag.

[3] Zur Frage, ob der Korridor den Bereich sparsamer und wirtschaftlicher Haushaltsführung markiert, vgl. *Kuhn* (2016), Kap. 1.

1. Das Verfahren

Bevor wir das Korridorverfahren im Hinblick auf die eingangs erwähnte Problematik analysieren können, ist zunächst eine formale Beschreibung vorzunehmen[4]. Dies geschieht mithilfe der geeigneten Zerlegung und Transformation einer beliebigen Zufallsvariablen und deren Dichte, die wiederum als Dichte einer gemischten Zufallsvariablen aufgefasst werden kann.

Dazu nehmen wir an, dass eine stetige Zufallsvariable X auf der Menge der reellen Zahlen mit Dichtefunktion $f(x)$, Verteilungsfunktion $F(x)$ und Erwartungswert μ_X existiert, die die originäre Verteilung der kommunalen Pro-Kopf-Defizite repräsentiert. Auf dieser Verteilung wird durch Stutzung und entsprechender Gruppierung von Kommunen ein Korridor gebildet. Formal wird dies durch eine Transformation der Zufallsvariablen X auf die Zufallsvariable $y(X)$ beschrieben, nach der Vorschrift:

$$(1) \qquad y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_X, & x \leq \frac{1}{2}\mu_X \\ x, & \frac{1}{2}\mu_X < x < \mu_X \\ \mu_X, & x \geq \mu_X \end{cases}$$

Wie zu erkennen ist, nehmen alle Werte der Zufallsvariablen X über dem Durchschnitt bei der Zufallsvariablen $y(X)$ den Erwartungswert von X, das ist μ_X, an, und alle Werte unter dem halben Durchschnitt nehmen bei $y(X)$ den halben Erwartungswert, $\mu_X/2$, an. Das Intervall der Defizitwerte wird dadurch erheblich verkürzt, ein Vorgang, der mit dem Namen „Korridor" recht plastisch bezeichnet ist. Dadurch wird es notwendig, die Masse der Kommunen neu zu verteilen, was sich in einer Transformation der Dichtefunktion $f(x)$ auf die Dichtefunktion[5] $f(y) = f(y(x))$ der Zufallsvariablen $y(X)$ nach folgendem Procedere ausdrückt.

Seien die *partielle* kontinuierliche Dichtefunktion $f_c(y)$ und die *partielle* diskrete Dichtefunktion $f_d(y)$ mit Hilfe der Verteilungsfunktion $F(x)$ wie folgt definiert:

$$(2) \qquad f_c(y(x)) := \begin{cases} \frac{d}{dx}F(x) = f(x), & \frac{1}{2}\mu_X < x < \mu_X \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$(3) \qquad f_d(y(x)) := \delta(\, y - \mu_X/2) \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\mu} f(x)dx + \delta(\, y - \mu_X) \int_{\mu}^{\infty} f(x)dx, \quad -\infty < y < \infty$$

[4] In diesem Abschnitt stützen wir uns grundlegend auf *Kuhn* (2016), Kap. 2. Dort findet sich auch eine ausführliche Darstellung des formalisierten Verfahrens.

[5] Da Verwechslungen nicht zu befürchten sind, wird der Einfachheit halber im Papier für die Dichtefunktionen $f_Y(y)$ von Y und $f_X(x)$ von X das gleiche Symbol f verwendet, obwohl es sich um unterschiedliche Funktionen handelt.

wobei die Dirac-Delta-Distribution[6] gegeben ist durch:

(4) $$\delta(y - y_0) := \begin{cases} 0, & y \neq y_0 \\ \infty, & y = y_0 \end{cases}$$

mit der Eigenschaft, dass für eine stetige Funktion $h(y)$ in y_0 gilt:

(5) $$\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, \delta(y - y_0) dy = h(y_0).$$

Dann lässt sich zeigen, dass:

(6) $$f(y) = f_c(y) + f_d(y),$$

die generalisierte Dichtefunktion der gemischten Zufallsvariablen $y(X)$ ist (**Beweis**: s. *Kuhn* (2016), Anhang 1).

Der Erwartungswert von $E\big(y(X)\big)$ ergibt sich daher als:

(7) $$E\big(y(X)\big) = \frac{\mu_X}{2} \int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\mu_X} x f(x) dx + \mu_X \int_{\mu_X}^{\infty} f(x)\, dx$$

Was geschieht eigentlich bei der Bildung des Korridors? Wie man sieht, findet eine Stutzung der Verteilung von X statt. Formal bedeutet dies die Zerlegung der Dichte der Zufallsvariablen X in eine sogenannte partielle stetige Dichte $f_c(y)$ und eine partielle diskrete Dichte $f_d(y)$, woraus additiv die generalisierte Dichte $f(y)$ der gemischten Zufallsvariablen Y generiert wird.

Der stetige Teil repräsentiert alle Werte der originären Verteilung, die gleich geblieben sind, d.h. an den Korridor nicht angepasst werden, während der diskrete Teil die Werte der Verteilung für die neu gruppierten Kommunen repräsentiert. Deren Masse liegt nach der neuen Gruppierung auf lediglich zwei Punkten, die auch die Grenzen des Korridors bilden und die Wahrscheinlichkeitswerte $f_d(\mu_X/2)$ bzw. $f_d(\mu_X)$ besitzen. Die entsprechenden Werte ergeben sich aus der Integration der Funktion $f_d(y)$ über den Definitionsbereich $y \in (-\infty, \infty)$ unter Verwendung der Eigenschaft (5). Dass die Funktion $f(y)$ wiederum als Dichte der Zufallsvariablen Y aufgefasst werden kann, stellt eine entscheidende Bedingung für die nachfolgende formale Analyse der impliziten Eigenschaften des Korridorverfahrens dar. Hierzu betrachten wir zunächst Änderungen der Budgets, die bei Kommunen links außerhalb des Korridors auftreten.

[6] Zur Darstellung der Dichtefunktion einer (reinen) diskreten Zufallsvariablen mit Hilfe der Dirac-Delta-Distribution vgl. *Lefebvre* (2009), S. 4, 58f. Die Dirac-Delta-Distribution stellt vereinfacht ausgedrückt sicher, dass die Masse der Kommunen, die auf den diskreten Werten der Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(y)$ liegt, bei der Integration von $f(y)$ über den gesamten Definitionsbereich nicht verschwindet.

2. Effekte von Defizitänderungen links vom Korridor

Nehmen wir als ersten Fall an, dass das Defizit der Masse der Kommunen links vom Korridor sinkt, und zwar mit Faktor $\lambda < 1$, während das Defizit der Masse der Kommunen rechts vom Korridor und derjenigen innerhalb konstant bleiben sollen.

Formal entspricht dies einer Transformation der Zufallsvariablen X mit Erwartungswert μ_X auf die Zufallsvariable $Z = z(X)$ nach der Vorschrift:

$$(8) \qquad z(x) = \begin{cases} \lambda x, & x < \frac{\mu_X}{2}, \\ x, & x \geq \frac{\mu_X}{2} \end{cases}$$

Die zugehörige, abschnittsweise definierte, Dichte ergibt sich unter Verwendung der Transformationsregel[7] für die kontinuierlichen Teile der Dichte wie folgt: [8]

$$(9) \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\lambda}, & z^{-1}(z) < \frac{\mu_X}{2} \\ f(x), & z^{-1}(z) \geq \frac{\mu_X}{2} \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Der Erwartungswert μ_z von Z ist gegeben als:

$$(10) \qquad \mu_Z := E\big(z(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz = \int_{-\infty}^{z^{-1}\left(\frac{\mu_X}{2}\right)} \lambda x \frac{f(x)}{\lambda} \lambda dx \; + \int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\infty} x f(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} x f(x) dx \; + \int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\infty} x f(x) dx$$

Für die Differenz der Erwartungswerte von X und Z gilt:

$$(11) \qquad \mu_Z - \mu_X = (\lambda - 1) \int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} x f(x) dx \, ,$$

woraus weiter folgt: $\lambda\mu_X < \mu_Z < \mu_X$.

Die Transformation der Zufallsvariablen Z auf den Korridor, repräsentiert durch die gemischte Zufallsvariable $y(Z) = y(z(X))$, ergibt unter Beachtung von $z(x)$ und $\lambda\mu_X < \mu_Z < \mu_X$:

---

[7] $f(z) = \frac{f\left(z^{-1}(z)\right)}{z'\left((z^{-1}(z)\right)}$, wobei $z^{-1}(z)$ die Umkehrfunktion von $z(x)$ bezeichnet.

[8] Beweis: $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \int_{-\infty}^{z^{-1}(\lambda\frac{\mu_X}{2})} \frac{f(x)}{\lambda} \lambda dx + \int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$

$$(12) \qquad y(z) = \begin{cases} \frac{\mu_Z}{2}, & z^{-1}(z) \leq \frac{\mu_X}{2} \\ x, & \frac{\mu_X}{2} < z^{-1}(z) < \mu_Z \\ \mu_Z, & z^{-1}(z) \geq \mu_Z \end{cases}$$

Die zugehörige Dichtefunktion $f\big(y(z)\big) = f_c\big(y(z)\big) + f_d\big(y(z)\big)$ lautet:

$$(13) \qquad f_c\big(y(z)\big) = \begin{cases} f(x), & \frac{\mu_X}{2} < z^{-1}(z) < \mu_Z \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$(14) \qquad f_d\big(y(z)\big) = \delta\left(y - \frac{\mu_Z}{2}\right) \int_{-\infty}^{z^{-1}(\lambda\frac{\mu_X}{2})} \frac{f(x)}{\lambda} \lambda\, dx + \ \delta(y - \mu_Z) \int_{\mu_Z}^{\infty} f(x)dx, \quad -\infty < y < \infty$$

Für den Erwartungswert $E\big(y(Z)\big)$ erhält man mit $\lambda\mu_X < \mu_Z < \mu_X$:

$$(15) \qquad E\big(y(Z)\big) = \frac{\mu_Z}{2} \int_{-\infty}^{z(\frac{\mu_X}{2})} f(z)dz + \int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\mu_Z} xf(x)dx + \mu_z \int_{\mu_Z}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \frac{\mu_Z}{2} \int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\mu_Z} xf(x)dx + \mu_z \int_{\mu_Z}^{\infty} f(x)dx$$

Die Differenz der Erwartungswerte im Korridorverfahren ergibt sich mit einigen mathematischen Manipulationen:

$$(16) \qquad E\big(y(Z)\big) - E\big(y(X)\big) =$$

$$\left(\frac{\mu_Z}{2} - \frac{\mu_X}{2}\right) \int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} f(x)dx + \int_{\mu_Z}^{\mu_X} (\mu_Z - x)f(x)dx + (\mu_Z - \mu_X) \int_{\mu_X}^{\infty} f(x)dx < 0$$

Wie zu erkennen ist, geht im Korridorverfahren der Erwartungswert der Defizite, verglichen mit der Anfangssituation, zurück, anstatt wie gefordert wenigstens konstant zu bleiben. Den Kommunen links vom Korridor sollten ja zumindest die gleichen Finanzmittel zur Verfügung stehen, damit Ihr Güterangebot das untere Limit nicht unterschreitet. Doch nicht nur die Masse der Kommunen links vom Korridor fällt auf ein niedrigeres Niveau zurück (erster Term auf der rechten Seite von (16)), nämlich den neuen halben Durchschnittswert, sondern auch die Masse der Kommunen rechts vom Korridor sowie ein Teil der Masse innerhalb (dritter und zweiter Term), ohne dass sich deren eigenes Defizit überhaupt geändert hätte. Entgegen der Logik des Korridorverfahrens bedeutet dies ökonomisch, dass ineffiziente Kommunen rechts vom Korridor und am rechten Rand von externen Effekten betroffen sind und schlechter gestellt werden, wenn Kommunen links vom Korridor für die Bereitstellung lokaler öffentlicher Güter noch weniger Mittel aufwenden, als sie es vorher bereits in zu geringem Umfang getan haben.

Der Grund für diese wenig plausible Eigenschaft des Korridorverfahrens ist in der Verschiebung des Korridors zu suchen, die immer dann eintritt, sobald sich das Defizit irgendeines Teils der Masse der Kommunen ändert. Ursächlich dafür wiederum ist die Anbindung des Korridors an den statistischen Mittelwert, der neue Korridorgrenzen stets dann erzeugt, wenn er sich aufgrund von Defizitänderungen eines Teils der Kommunen oder aller ändert.

Proposition 1

Sinkt c. p. das Defizit der Masse der Kommunen von links außerhalb des Korridors, dann geht im Korridorverfahren der Erwartungswert der Verteilung verglichen mit der Ausgangssituation zurück.

Beweis: s. oben Ausdruck (16).

Bemerkenswert an diesem Resultat und von großer Bedeutung für die Finanzpraxis ist die Tatsache, dass es nicht von einer spezifischen Dichtefunktion, die die Realität womöglich nicht abbildet, abhängig gemacht ist, sondern für alle denkbaren Verteilungen gilt und damit unmittelbar auf die Empirie übertragen werden kann.

3. Effekte von Defizitänderungen rechts vom Korridor

Betrachten wir nun den Fall, dass das Defizit der Masse der Kommunen rechts außerhalb des Korridors um den Faktor $\lambda > 1$ steigt, während das Defizit der Masse der Kommunen links vom Korridor und derjenigen innerhalb gleich bleibt.

Dies bedingt eine Transformation der Zufallsvariablen X mit Erwartungswert μ_X auf die Zufallsvariable Z nach der Vorschrift:

$$(17) \qquad z(x) = \begin{cases} x, & x \leq \mu_X \\ \lambda x, & x > \mu_X \end{cases}$$

Die abschnittsweise definierte Dichte[9] von $Z = z(X)$ ergibt sich unter Anwendung der Transformationsregel für kontinuierliche Dichten von transformierten Zufallsvariablen:

[9] Beweis:
$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\mu_X} f(x)dx + \int_{z^{-1}(\lambda\mu_X)}^{\infty} \frac{f\left(z^{-1}(z)\right)}{z'\left((z^{-1}(z)\right)} \left|z'\left((z^{-1}(z)\right)\right| dx = \int_{-\infty}^{\mu_X} f(x)dx + \int_{z^{-1}(\lambda\mu_X)}^{\infty} \frac{f(x)}{\lambda} \lambda dx = 1.$

(18) $$f(z) = \begin{cases} f(x), & z^{-1}(z) \leq \mu_X \\ \frac{f(x)}{\lambda}, & z^{-1}(z) > \mu_X \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Der Erwartungswert μ_z von Z ist gegeben als:

(19) $$\mu_z := E\big(z(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz = \int_{-\infty}^{\mu_X} xf(x)dx + \int_{\lambda\mu_X}^{\infty} zf(z)dz =$$

$$\int_{-\infty}^{\mu_X} xf(x)dx + \lambda \int_{\mu_X}^{\infty} x\frac{f(x)}{\lambda}\lambda dx = \int_{-\infty}^{\mu_X} xf(x)dx + \lambda \int_{\mu_X}^{\infty} xf(x)dx$$

Für die Differenz der Erwartungswerte von X und Z gilt:

(20) $$\mu_Z - \mu_X = (\lambda - 1) \int_{\mu_X}^{\infty} xf(x)dx$$

Daraus folgt weiter: $\lambda\mu_X > \mu_Z > \mu_X$.

Die Transformation der Zufallsvariable Z auf den Korridor, repräsentiert durch die gemischte Zufallsvariable $y(z(X))$, ergibt:

(21) $$y(z) = \begin{cases} \frac{\mu_Z}{2}, & z^{-1}(z) \leq \frac{\mu_Z}{2} \\ x, & \frac{\mu_Z}{2} < z^{-1}(z) < \mu_X \\ \mu_Z, & z^{-1}(z) \geq \mu_X \end{cases}$$

Die zugehörige Dichte $f\big(y(z)\big) = f_c\big(y(z)\big) + f_d\big(y(z)\big)$ lautet:

(22) $$f_c\big(y(z)\big) = \begin{cases} f(x), & \frac{\mu_Z}{2} < z^{-1}(z) < \mu_X \\ 0, & sonst \end{cases}$$

(23) $$f_d\big(y(z)\big) = \delta\left(y - \frac{\mu_Z}{2}\right) \int_{-\infty}^{\frac{\mu_Z}{2}} f(x)dx + \delta(y - \mu_Z) \int_{z^{-1}(\lambda\mu_X)}^{\infty} \frac{f(x)}{\lambda}\lambda dx, \quad -\infty < y < \infty$$

Für den Erwartungswert $E\big(y(Z)\big)$ erhält man unter Verwendung von $\mu_X < \mu_Z < \lambda\mu_X$:

(24) $$E\big(y(Z)\big) = \frac{\mu_Z}{2} \int_{-\infty}^{\frac{\mu_Z}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\mu_Z}{2}}^{\mu_X} xf(x)dx + \mu_Z \int_{z(\mu_X)}^{\infty} f(z)dz = \frac{\mu_Z}{2} \int_{-\infty}^{\frac{\mu_Z}{2}} f(x)dx +$$

$$\int_{\frac{\mu_Z}{2}}^{\mu_X} xf(x)dx + \mu_Z \int_{\mu_X}^{\infty} f(x)dx$$

Die Differenz der Erwartungswerte im Korridorverfahren ergibt sich mit einigen mathematischen Manipulationen:

(25) $E\big(y(Z)\big) - E\big(y(X)\big) =$

$$\left(\frac{\mu_Z}{2} - \frac{\mu_X}{2}\right)\int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\frac{\mu_Z}{2}}\left(\frac{\mu_Z}{2} - x\right) f(x)dx + (\mu_Z - \mu_X)\int_{\mu_X}^{\infty} f(x)dx > 0$$

Erkennbar wird, dass der Erwartungswert der Verteilung im Vergleich zur Ausgangssituation zunimmt, obwohl er nach der Logik des Korridorverfahrens konstant bleiben sollte. Nicht nur die Masse der Kommunen rechts vom Korridor erreicht ein höheres Niveau, auf dem neuen statistischen Durchschnittswert (dritter Term auf der rechten Seite von (25)), sondern auch die Masse der Kommunen links vom Korridor und ein Teil der Masse innerhalb, ohne dass sich deren eigenes Defizit überhaupt geändert hätte. Entgegen der Logik des Korridorverfahrens werden also Kommunen im vertikalen Finanzausgleich besser gestellt, wenn sie noch ineffizienter sind, als sie vorher schon waren, was wenig sinnvoll erscheint. Und auch die unzureichend ausgestatteten Kommunen am linken Rand und ein Teil der Kommunen im Korridor profitieren davon, weil das Mindestniveau der Budgetdefizite steigt. Dieses Resultat entspricht sicher nicht der Intention, die mit dem Korridorverfahren verbunden ist.

Proposition 2

Steigt c. p. das Defizit der Masse der Kommunen rechts außerhalb des Korridors, dann steigt im Korridorverfahren der Erwartungswert der Verteilung im Vergleich zur Ausgangssituation an.

Beweis: s. Ausdruck (25) oben.

Ähnliche Überlegungen kann man natürlich auch für den Fall anstellen, dass das Defizit der Masse der Kommunen rechts vom Korridor c. p. fällt, jedoch nicht unter das statistische Mittel. Dann fällt bei analoger Beweisführung im Korridorverfahren der Erwartungswert der Verteilung im Vergleich zur Ausgangssituation. Verausgaben ineffiziente Kommunen also weniger Mittel als vorher und steigt somit ihre Effizienz, dann impliziert dies gleichzeitig, dass das Mindestniveau des Budgetdefizits, das Kommunen am linken Rand des Spektrums erreichen sollen, weil ihr Angebot öffentlicher Leistungen schon vorher als zu niedrig galt, noch weiter sinkt. Eine sinnvolle ökonomische Begründung dafür ist u. W. allerdings noch nicht gegeben worden.

4. Effekte von Defizitänderungen innerhalb des Korridors

Betrachten wir nun eine Situation, die zur vorherigen gewissermaßen komplementär ist und voraussetzt, dass sich das Defizit der Masse der Kommunen außerhalb des Korridors nicht ändert, während das Defizit der Masse der Kommunen innerhalb des Korridors um den Faktor $\lambda > 1$ zunehmen soll, ohne dass das obere Limit des Korridors, das durch das statistische Mittel μ_X gegeben ist, überschritten wird. Dann sollte der Erwartungswert im Korridorverfahren um nicht mehr als das statistische Mittel steigen, auch weil das Defizit der Masse der Kommunen außerhalb des Korridors unverändert geblieben ist.

Die Transformation der Zufallsvariablen X mit Erwartungswert μ_X auf die Zufallsvariable Z erfolgt in diesem Fall nach der Vorschrift:

$$(26) \qquad z(x) = \begin{cases} x, & x \leq \frac{\mu_X}{2} \\ \lambda x, & \frac{\mu_X}{2} < x < \frac{\mu_X}{\lambda} \\ \mu_X, & \frac{\mu_X}{\lambda} \leq x < \mu_X \\ x, & x \geq \mu_X \end{cases}$$

Die zugehörige generalisierte Dichtefunktion $f(z) = f_c(z) + f_d(z)$, abschnittsweise definiert, lautet[10]:

$$(27) \qquad f_c(z) = \begin{cases} f(x), & z^{-1}(z) \leq \frac{\mu_X}{2} \\ \frac{f(x)}{\lambda}, & \frac{\mu_X}{2} < z^{-1}(z) < \frac{\mu_X}{\lambda} \\ f(x), & z^{-1}(z) \geq \mu_X \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$f_d(z) = \delta(z - \mu_X) \int_{\mu_{X/\lambda}}^{\mu_X} f(x)dx\,, \ -\infty < z < \infty$$

Der Erwartungswert von Z ist:

$$(28) \qquad \mu_Z := E\big(z(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} xf(x)dx + \lambda \int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\mu_{X/\lambda}} xf(x)dx + \mu_X \int_{\mu_{X/\lambda}}^{\mu_X} f(x)dx + \int_{\mu_X}^{\infty} xf(x)dx$$

Die Differenz der Erwartungswerte ergibt:

[10] Beweis: $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\mu_{X/\lambda}} \frac{f(x)}{\lambda} \lambda dx + \int_{\mu_{X/\lambda}}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

(29) $\mu_Z - \mu_X = (\lambda - 1)\int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\mu_{X/\lambda}} xf(x)dx + \int_{\mu_{X/\lambda}}^{\mu_X} (\mu_X - x)f(x)dx > 0$

Eine Implikation davon ist: $\mu_X < \mu_Z < \lambda\mu_X$.

Der Korridor von $z(X)$, repräsentiert durch die Zufallsvariable $Y = y(z(X))$, ergibt sich unter Beachtung von $\mu_X < \mu_Z < \lambda\mu_X$ und mit $z(x)$ aus der Transformation:

(30) $$y(z) = \begin{cases} \frac{\mu_Z}{2}, & z^{-1}(z) \leq \frac{\mu_X}{2} \\ \lambda x, & \frac{\mu_X}{2} < z^{-1}(z) < \frac{\mu_X}{\lambda} \\ \mu_X, & \frac{\mu_X}{\lambda} \leq z^{-1}(z) \leq \mu_X \\ x, & \mu_X < z^{-1}(z) < \mu_Z \\ \mu_Z, & z^{-1}(z) \geq \mu_Z \end{cases}$$

Die zugehörige Dichte $f\big(y(z)\big) = f_c\big(y(z)\big) + f_d\big(y(z)\big)$ lautet:

(22) $$f_c\big(y(z)\big) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\lambda}, & \frac{\mu_X}{2} < z^{-1}(z) < \frac{\mu_X}{\lambda} \\ f(x), & \mu_X < z^{-1}(z) < \mu_Z \\ 0, & sonst \end{cases}$$

(23) $$f_d\big(y(z)\big) = \delta\left(y - \frac{\mu_Z}{2}\right)\int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} f(x)dx + \delta(y - \mu_X)\int_{\frac{\mu_X}{\lambda}}^{\mu_X} f(x)dx + \delta(y - \mu_Z)\int_{\mu_z}^{\infty} f(x)\,dx,$$

$$-\infty < y < \infty$$

Der Erwartungswert lautet:

(31) $$E\big(y(Z)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy = \frac{\mu_Z}{2}\int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} f(x)dx + \lambda\int_{\frac{\mu_X}{2}}^{\frac{\mu_X}{\lambda}} xf(x)dx + \mu_X\int_{\frac{\mu_X}{\lambda}}^{\mu_X} f(x)dx + \int_{\mu_X}^{\mu_Z} xf(x)dx + \mu_z\int_{\mu_Z}^{\infty} f(x)dx$$

Vergleicht man den Anstieg des Erwartungswerts im Korridorverfahren mit dem Anstieg des statistischen Mittels, erhält man mit einigen mathematischen Manipulationen das folgende Resultat:

(32) $$\big|E\big(y(Z)\big) - E\big(y(X)\big)\big| > |\mu_Z - \mu_X| \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\mu_Z}{2} - \frac{\mu_X}{2}\right)\int_{-\infty}^{\frac{\mu_X}{2}} f(x)dx + \int_{\mu_X}^{\mu_Z}(x - \mu_X)f(x)dx + (\mu_Z - \mu_X)\int_{\mu_Z}^{\infty} f(x)dx > 0$$

Dieses Resultat zeigt erneut eindringlich, dass die Forderung, den kommunalen Anteil im vertikalen Finanzausgleich nur über die auf den Korridor gestutzten Defizite der Kommunen zu bestimmen, nicht erfüllt werden kann. Unter der Annahme, dass lediglich das Defizit der Masse der Kommunen

innerhalb des Korridors steigt, aber maximal nur bis zum oberen Limit, und alle anderen Werte konstant bleiben, steigt der Erwartungswert der Defizite im Korridor um mehr als das statistische Mittel, also *überproportional*. Alle Terme auf der linken Seite der Ungleichung in (32) sind positiv und repräsentieren die gestiegene Finanzausstattung der Kommunen links und rechts vom alten Korridor, obwohl sich deren Defizite überhaupt nicht verändert haben.

Proposition 3

Nimmt in der Verteilung der kommunalen Defizite c. p. das Defizit der Masse der Kommunen innerhalb des Korridors unter bestimmten Bedingungen zu, dann steigt der Erwartungswert im Korridorverfahren relativ zum statistischen Mittel überproportional.

Beweis: s. Ausdruck (32) oben.

Ähnliche Überlegungen lassen sich nun auch für den Fall anstellen, dass c. p. das Defizit der Masse der Kommunen innerhalb des Korridors sinkt, jedoch die untere Grenze nicht unterschreitet. Dann lässt sich bei analoger Beweisführung zeigen, dass der Erwartungswert im Korridorverfahren *überproportional* zum statistischen Mittel zurückgeht.

5. Effekte von „Ausreißern“

Das Korridorverfahren wird vom Gesetzgeber unter anderem damit begründet, dass statistische Ausreißer nach Möglichkeit in der Berechnung von Durchschnittswerten bereinigt werden sollten[11]. Eine Überprüfung anhand statistischer Kriterien, ob überhaupt Ausreißer vorhanden sind, erfolgt im Korridorverfahren allerdings nicht. Vermutet man sie an den Rändern der Verteilung, dann werden Ausreißer ebenso wie alle anderen Defizitwerte außerhalb des Korridors auf den Durchschnitt gestutzt, weil sie weit darüber liegen und als überhöht empfunden werden, oder auf die Hälfte des Durchschnitts gestutzt, weil sie weit darunter liegen und als zu niedrig gelten. Dies bedeutet jedoch nicht, dass ihr Einfluss auf den Erwartungswert der Korridorverteilung eliminiert werden kann, wie intendiert, ganz im Gegenteil.

Das Korridorverfahren reagiert nämlich, wie die bisherigen Resultate nahelegen, sehr sensitiv auf Ausreißer, weil die zu hohen oder zu geringen Defizite in die Berechnung des statistischen Durchschnitts eingehen und damit die Grenzen des Korridors beeinflussen. Davon sind in der Folge auch die Defizite der Masse von Kommunen an den neuen Korridorgrenzen betroffen, die je nach Vertei-

[11] *Hessischer Landtag*, 19. Wahlperiode, Drucksache 19/1853, BII.

lung erheblich sein kann (bis zu ¾ der gesamten Masse bei der Gleichverteilung). Und damit verändert sich wiederum der Erwartungswert, der sich aus dem neuen Korridor ergibt. Anders ausgedrückt, Ausreißer am äußersten rechten Rand bewegen den Korridor nach rechts und den Erwartungswert nach oben, Ausreißer am äußersten linken Rand bewegen den Korridor nach links und den Erwartungswert der Korridorverteilung nach unten. Dies umso mehr, je extremer die Werte der Ausreißer jeweils ausfallen, ganz entgegen der Intention, den Effekt von statistischen Ausreißern nach Möglichkeit zu eliminieren.

Proposition 4

Das Korridorverfahren reagiert auf Ausreißer sensitiv mit einer Reduktion der durchschnittlichen kommunalen Finanzausstattung im Falle von Ausreißern am äußersten linken Rand und einer Erhöhung der durchschnittlichen kommunalen Finanzausstattung im Falle von Ausreißern am äußersten rechten Rand.

Beweis: Implikation aus den Propositionen 1 und 2.

Dieses Resultat bedeutet im Endeffekt, dass die vertikale Verteilung der Finanzmittel zwischen Land und Kommunen in einem bestimmten Maß nicht zuletzt von Ausreißern abhängt. Diese Eigenschaft ist sicherlich nicht erwünscht, sind doch gerade die Ausreißer als die besten Repräsentanten für Ineffizienz zu betrachten und haben neben anderen Gründen letztlich zur Konzeption des Korridorverfahrens in der gegenwärtigen Form geführt.

6. Implikationen für die Finanzpraxis

Zur Logik und in der Finanzpraxis vorherrschenden Intention des Korridorverfahrens gehört vor allem, dass Änderungen der Budgetdefizite von vermeintlich ineffizienten Kommunen außerhalb des Korridors das durchschnittliche kommunale Defizit im vertikalen Finanzausgleich nicht beeinflussen sollten, sondern nur Defizitänderungen von effizienten Kommunen innerhalb des Korridors Berücksichtigung finden dürfen. Diese Eigenschaft besitzt das Korridorverfahren jedoch nicht.

Wird beispielsweise von einer Situation ausgegangen, in der die Defizite von Kommunen rechts außerhalb des Korridors c. p. steigen, dann führt dies zu einem Anstieg des Erwartungswerts der Korridorverteilung, womit Kommunen, die ohnehin schon als ineffizient gelten, belohnt werden, wenn sie noch ineffizienter werden. Ähnliches gilt, wenn die Defizite von Kommunen links außerhalb des Korridors c. p. sinken. Dann geht auch der Erwartungswert der Korridorverteilung zurück, obwohl er

zumindest nicht sinken sollte, damit Kommunen am linken Rand, deren Ausstattung mit öffentlichen Gütern ohnehin als zu niedrig angesehen wird, ihr Budget nicht noch mehr reduzieren (müssen).

Betrachtet man hingegen die komplementäre Situation, in der sich nur das Defizit der Masse der Kommunen innerhalb des Korridors erhöht, und bei der Masse der Kommunen außerhalb überhaupt keine Defizit-Änderungen auftreten, reagiert das Verfahren auch dann unangemessen. Es weist nämlich einen relativ zum Anstieg des statistischen Mittels überproportional steigenden Erwartungswert auf, der auch einen Anstieg der Finanzausstattung für alle Kommunen außerhalb des Korridors beinhaltet, obwohl sich an deren Budgets überhaupt nichts geändert hat.

Eine wesentliche Implikation der aufgezeigten Schwächen des Korridorverfahrens liegt nicht zuletzt in der inadäquaten Behandlung statistischer Ausreißer. Entgegen der Intention, Ausreißer aus der Berechnung der durchschnittlichen Finanzausstattung zu eliminieren, reagiert das Korridorverfahren sensitiv auf potenzielle Ausreißer. Ausreißer am äußersten rechten Rand verschieben den Korridor nach rechts und bewegen den Erwartungswert nach oben, Ausreißer am äußersten linken Rand verschieben den Korridor nach links und bewegen den Erwartungswert nach unten. Dieser Effekt ist umso grösser, je extremer die Werte der Ausreißer ausfallen, anstatt den Einfluss von statistischen Ausreißern nach Möglichkeit zu eliminieren. Infolgedessen kommt es auch zu einer je anderen Einschätzung im Hinblick darauf, was als angemessene Finanzausstattung von Kommunen gilt.

Schlussbemerkungen

Das Korridorverfahren im vertikalen Finanzausgleich der Länder weist eine Reihe von impliziten Schwächen auf, die in diesem Beitrag offengelegt wurden. Dazu wurde eine Reihe von Propositionen, die an dieser Stelle nicht im Einzelnen zu rekapitulieren sind, formuliert und detailliert begründet. Von Interesse für die Implementation des Verfahrens in den Ländern dürfte vor allem die Erkenntnis sein, dass das Korridorverfahren kaum eine Forderung erfüllt, die seiner eigentlichen Intention entspricht. Im Gegenteil, es generiert in nahezu allen Fällen konträre und kontraintuitive Effekte, wenn man die in der Finanzpraxis vorherrschende Logik zum Maßstab nimmt. Dies ist natürlich ein ernüchterndes Resultat. Seine Bedeutung liegt vor allem darin begründet, dass die zugrundeliegenden Propositionen für beliebige, nicht weiter spezifizierte Verteilungen deduziert wurden und daher unmittelbar auf die Empirie anwendbar sind.

Literaturverzeichnis

Färber, G. et al. (2012)*,* Reform des kommunalen Finanzausgleichs in Thüringen, Deutsches Forschungsinstitut für öffentliche Verwaltung Speyer, Speyer

Hessischer Landtag, 19. Wahlperiode, Drucksache 19/1853, BII

Kuhn, *T.* (2016), Das Korridorverfahren im Kommunalen Finanzausgleich, WWDP 127/2016, Chemnitz

Lamouroux, L. et al. (2016), Verteilungssymmetrie im vertikalen Teil des kommunalen Finanzausgleich Schleswig-Holsteins, Finanzwissenschaftliches Forschungsinstitut an der Universität zu Köln, Köln

Lefebvre, M. (2009)*,* Basic Probability Theory with Applications, Dordrecht