TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Professur für Volkswirtschaftslehre IV
- Finanzwissenschaft -
Professor Dr. Thomas Kuhn

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

TU Chemnitz • Fakultät für Wirtschaftswissenschaften • 09107 Chemnitz • Germany

Skript zur Vorlesung

Mathematische Wirtschaftstheorie

Prof. Dr. Thomas Kuhn

Stand: 18.06.2019

Gliederung

Kapitel 1: Optimierung mit einer Variablen (Marginalkalkül)

Literatur

- D.W. Hands (2004): Introductory Mathematical Economics (Semesterapparat), S. 57 – 68 und S. 76 - 80.

Marginalismus in der ökonomischen Theorie

Marginalismus bedeutet: Akteure treffen ökonomische Entscheidungen an der "Grenze", dort wo marginale Änderungen etwa in Bezug auf die Extraktion einer Ressource oder die Produktion und den Konsum von Gütern den Wert einer ökonomischen Zielfunktion (felicity function) nicht mehr erhöhen, sondern wieder veringern. D.h., die Effekte einer ökonomischen Entscheidung schlagen vom positiven ins Negative um, oder der Wert einer ökonomischen Zielfunktion lässt sich an der Grenze des Ressourcenbestandes nicht mehr steigern, wenn die letzte Einheit der Ressource aufgebraucht ist. Der Wert der Ressource ergibt sich dann aus dem Nutzen, den die letzte (marginale Einheit) erzeugt.

Grundlegende Betrachtungen zum Wert von Ressourcen nach dem Marginalkalkül

Unbeschränkte Optimierung

$\max_x \pi = p * x - C'(x)$ $\qquad FOC \quad \frac{\partial \pi}{\partial x} = p - \frac{dC(x)}{dx} = 0$

$$p = \frac{dC(x)}{dx} \rightarrow x^*(p)$$

Produziert wird eine Menge $x^*(p)$, bei der der Preis die Grenzkosten deckt, d.h. die Kosten der letzten (marginalen) Einheit. Bei $x < x^*$: Grenzkosten < Preis → mehr Produktion. Bei $x > x^*$: Grenzkosten > Preis → weniger Produktion.

Sei ein Multi-Purpose Gut in der Menge $\bar{R} > 0$ gegeben (bestimmte Menge eines Konsumgutes oder eines Ressourcenbestandes).Das Gut oder direkt die Ressource stiften Nutzen ,bzw. tragen zur Bedürfnisbefriedigung bei. Die Nutzenfunktion U(R) sei streng monoton wachsend und konkav auf der Definitionsmenge von $\bar{R} \geq R$. Ein Akteur maximiere den Nutzen unter der Ressourcenbeschränkung. Das Optimierungsproblem (P) lautet:

$$(P) \quad \max_R u\,(R)$$
$$s.t. R \leq \bar{R}$$

Lösung durch Fallunterscheidung

a) Die Restriktion "greift", d.h. $R = \bar{R}$ im Optimum
b) Die Restriktion "greift" nicht, d.h. . $R < \bar{R}$ im Optimum

Fall a) Beschränktes Optimierungsproblem $(\bar{P})$

$$(P) \quad \max_R u\,(R)$$
$$s.t. R = \bar{R}$$

Lagrange:

$$L(R,\lambda) = u(R) + \lambda(\bar{R} - R) \rightarrow \max_{R,\lambda}$$

FOC's $\frac{dL}{dR} = \frac{dU(R)}{dR} - \lambda = 0$

$$\frac{dL}{d\lambda} = R - \bar{R} = 0$$

Lösung: $R^* = \bar{R}$

$\lambda^* = \frac{dL}{dR}(L)$

Optimal ist die letzte marginal verfügbare Einheit der Ressource $\bar{R}$, d.h. die Ressource wird vollständig aufgebraucht (wegen der Monotonie der Felicity-Function). Dort ist der Schattenpreis , λ^*, der Ressource gegeben durch den Grenznutzen der letzten Einheit.
Generell sobald eine Ressource beschränkt ist und Akteure sie vollständig aufbrauchen möchten, hat die Ressource einen positiven Wert (Schattenpreis). Ressourcen die nicht vollständig genutzt werden, besitzen keinen Wert, da sie nicht knapp sind.

Fall b) Unbeschränktes Optimierungsproblem

$\max_R u\,(R)$

FOC $\frac{dU}{dR}(R) = 0$

Aufgrund der strengen Monotonie der Funktion $u(R)$ auf $R < \bar{R}$ hat die FOC keine Lösung R^* .

Anmerkung: Fall b) würde zutreffen, wenn es auf $R < \bar{R}$ einen Sättigungspunkt R^* gäbe, mit $\frac{du}{dR}(R^*) = 0$

1.1 Grenznutzen

- Gegeben sei die Nutzenfunktion $U = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$

  GN von Gut 1: $\frac{\partial U}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha}$

  GN von Gut 2: $\frac{\partial U}{\partial x_2} = x_1^\alpha (1-\alpha) x_2{}^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\alpha$

1.2 Isoquanten

- Isoquante mit Nutzenniveau $U = \bar{U}$

  $\bar{U} = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$

  $\Leftrightarrow x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} - \bar{U} = 0 := F(x_1, x_2, \bar{U})$

  F bezeichnet eine implizite Funktion oder Umstellen nach x_2: $x_2 = \frac{\bar{U}^{\frac{1}{1-\alpha}}}{x_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$
- Steigung der Isoquante bei konstantem Nutzenniveau entspricht der Substitutionsrate

1.3 Substitutionsraten

3 Möglichkeiten zur Berechnung der Substitutionsrate: $MRS = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=\bar{U}}$

(1) Implizite Differentiation:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial F(.)}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial F(.)}{\partial x_2}$$

$$= -\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_2^{-\alpha} x_1^{\alpha}}$$
$$= -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1}$$

Voraussetzung: Auflösung von F nach x_2 möglich, d.h. $x_2(x_1)$ existiert.

(2) Auflösen der impliziten Funktion nach x_2:

$U(x_1, x_2) - \bar{U} = 0$

x_2 als Funktion von x_1: $U[x_1, x_2(x_1)] - \bar{U} = 0$
$=: F[x_1, \bar{U}]$

Ableiten von F nach x_1 $\frac{\partial F(.)}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} * \frac{dx_2}{dx_1} = 0$

Gleiches Ergebnis wie in *(1)* $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_2}$

(3) Totales Differential:

Totales Differential von U gleich Null setzen $dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$

Gleiches Ergebnis wie in *(1).* $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_2}$

1.4 Homogene Funktionen

- Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist gegeben
- Eine Funktion f ist homogen vom Grad $r > 0$ genau dann, wenn für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$
- Anwendung: Bestimme den Homogenitätsgrad von Funktionen

1) Gegeben sei $y = f(K, L) = AL^{\alpha}K^{\beta}$ mit $A > 0$

Zeige*:* y ist homogen vom Grad $r = \alpha + \beta$:

$$f(\lambda L, \lambda K) = A(\lambda L)^{\alpha}(\lambda K)^{\beta}$$
$$= \lambda^{\alpha+\beta} A L^{\alpha} K^{\beta}$$
$$= \lambda^r f(L, K) \qquad \text{mit } r = \alpha + \beta$$

2) Gegeben sei $y = f(K, L) = \frac{AL^{1+\alpha}K^{1+\beta}}{BL+CK}$ mit $A, B, C > 0$

Zeige: *y* ist homogen vom Grad $r = 1 + \alpha + \beta$:

$$\begin{aligned} f(\lambda L, \lambda K) &= \frac{A(\lambda L)^{1+\alpha}(\lambda K)^{1+\beta}}{B\lambda L + C\lambda K} \\ &= \frac{\lambda^{1+\alpha+1+\beta}AL^{1+\alpha}K^{1+\beta}}{\lambda^1(BL+CK)} \\ &= \lambda^r f(K, L) \qquad \text{mit } r = 1 + \alpha + \beta \end{aligned}$$

3) Sei $f(x)$ homogen vom Grad r. Bestimme den Homogenitätsgrad von $g(x) = [(f(x)]^{1/r}$:

$$g(\lambda x) = [(f(\lambda x)]^{1/r} = [\lambda^r f(x)]^{1/r} = \lambda[f(x)]^{1/r} = \lambda g(x)$$

Damit ist $g(x)$ homogen vom Grad $r = 1$.

4) Zeige, dass $f(0) = 0$:

$$f(\lambda 0) = \lambda^r f(0) \overset{!}{=} 0 \qquad \rightarrow \text{es muss gelten } f(0) = 0 \text{ da } r, \lambda > 0$$

Eine alternative Methode zur Bestimmung des Homogenitätsgrades geht über das *Euler-Theorem,* nach dem sich alle homogenen Funktionen durch ihre partiellen Ableitungen darstellen lassen:

Eine 2-fach differenzierbare Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ ist homogen vom Grad r, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$r \cdot f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i$$

Bestimme den Homogenitätsgrad von $y = f(K, L) = 2\sqrt{KL} = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$ über das Euler-Theorem:

$$r \cdot f(K, L) = r \cdot 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} = \underbrace{2\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}_{\frac{\partial y}{\partial K}} \cdot K + \underbrace{2K^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}L^{-\frac{1}{2}}}_{\frac{\partial y}{\partial L}} \cdot L$$

$$r \cdot 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} = K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$r \cdot f(K, L) = f(K, L)$$

Damit hat y einen Homogenitätsgrad von $r = 1$.

Kapitel 2: Komparative Statik mit einer und zwei Variablen sowie Optimierung

Literatur

- D.W. Hands (2004): Introductory Mathematical Economics, S. 33–37, S. 101–106, S. 109–115, S. 220–223, S. 228–231 und S. 262-267.

Grundsätzlich drei Methoden:

- Berechnen der expliziten Lösung eines Optimierungsproblems für die endogenen Variablen und Ableitung der Lösungen nach dem relevanten Parameter
- Einsetzen der Lösung in die Bedingung erster Ordnung (FOC), Ableiten nach dem Parameter und Lösen der Matrix des Gleichungssystems nach der Cramerschen Regel
- Anwenden des Theorems der impliziten Funktionen und der impliziten Differentiation auf die FOC

2.1 Komparative Statik mit einer Variablen am Beispiel einer kompetitiven Firma

- Gewinn: $\pi = p \cdot x - C(x) \rightarrow max_x$
  FOC $\frac{d\pi}{dx} = p - C'(x) = 0 \Rightarrow x^*(p)$
  SOC $\frac{d^2\pi}{dx^2} = -C''(x) < 0 \ \Leftrightarrow C''(x) > 0$

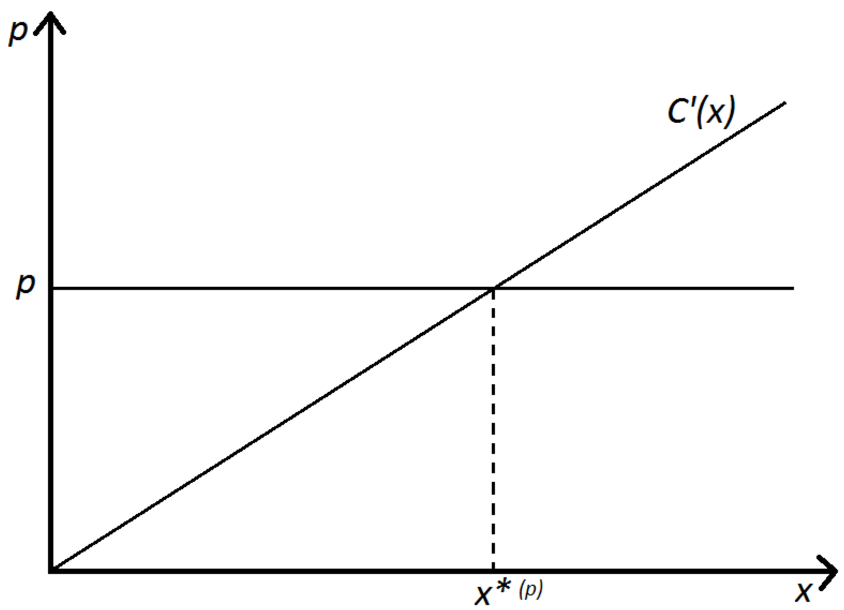

Abbildung 1: Gewinnmaximierung

- Komparative Statik für x^* in Bezug auf den Parameter p:

  1.) *Gilt die SOC, existiert die Lösung $x^*(p)$*

  Einsetzen in FOC:

$$p = C'\big(x^*(p)\big) \;\; \Leftrightarrow p - C'\big(x^*(p)\big) = 0 := F(x^*, p)$$

  Differentiation von F nach p:

$$\frac{dF}{dp} = 1 - \frac{\partial^2 C}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{dx^*}{dp} = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{dx^*}{dp} = {}^{1}\Big/\frac{\partial^2 C}{\partial x^{*2}} > 0$$

  Die Angebotsmenge steigt mit dem Preis.

  2.) *Verwendung des Satzes der impliziten Funktion*

  Allgemein:

  Sei $F(x, y) = 0$ eine implizit definierte Funktion zweier Variablen. Unter der Annahme, dass eine Auflösung $y(x)$ von F nach y existiert, gilt für die Ableitung die Formel:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}$$

  Herleitung:

  Totales Differential von F:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}$$

  Existenz von $y(x)$:

  $y(x)$ existiert, falls die Jacobi-Matrix J_F von F nicht verschwindet, d.h.

$$|J_F(x, y)| \neq 0$$

  Die Jacobi-Matrix J_F ist die Matrix der partiellen Ableitungen von F nach den unabhängigen Variablen, d.h. hier der ersten Ableitung von F nach x:

$$|J_F(x, y)| = |\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)| \neq 0$$

  Anwendung auf kompetitive Firma

  Aus der Bedingung 2. Ordnung (SOC) wissen wir, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} < 0$$

  Folglich existiert $x(p)$.

  Es gilt:

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{\partial F}{\partial p}\Big/\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{-C''(x)} = \frac{1}{C''(x)} > 0$$

  Die Angebotsfunktion ist streng monoton wachsend.

Beispiel:

Sei $\pi(x) = p \cdot x - cx^2$

FOC: $\frac{\partial \pi(x)}{\partial x} = p - 2cx = 0 \coloneqq F(x)$

SOC: $\frac{\partial^2 \pi(x)}{\partial x^2} = -2c < 0$

1.) Aus FOC: $x = {}^{p}/_{2c}$

$\frac{dx}{dp} = {}^{1}/_{2c}$

2.) Einsetzen von $x(p)$ in FOC: $p - 2c \cdot x(p) = 0$

Differentiation der FOC nach p: $1 - 2c\frac{dx}{dp} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{dp} = \frac{1}{2c}$

3.) Satz der impliziten Funktionen:

$$\frac{dx^*}{dp} = -\frac{\partial F}{\partial p}\Big/\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{-2c} = \frac{1}{2c}$$

2.2 Komparative Statik mit zwei Variablen und Optimierung

Betrachtet wird ein kompetitives Unternehmen mit der neoklassischen Produktionsfunktion $x = x(L, K)$. Hierbei steht x für den Output, p für den Marktpreis und L, K für zwei Inputfaktoren (z.B. Arbeit und Kapital). Die Faktorpreise spiegeln w und r wider.

2.2.1 Gewinnmaximierung:

$$\pi(L, K) = px(L, K) - wL - rK \;\; \rightarrow \;\; max_{L,K}$$

FOCs:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = p\frac{\partial x}{\partial L} - w = 0 =: F_1(L, K)$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = p\frac{\partial x}{\partial K} - r = 0 =: F_2(L, K)$$

SOCs: Prüfe: $\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} < 0$ und $|H\pi| > 0$

Determinante der Hesse-Matrix von π

$$|H\pi| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} * \frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K} > 0 \qquad | \text{ da } \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K}$$

$$= p^2\frac{\partial^2 x}{\partial L^2}\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} - p^2\left(\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}\right)^2 > 0$$

bzw.: $\frac{\partial^2\pi}{\partial L^2} < 0, \frac{\partial^2\pi}{\partial K^2} < 0$ und $|H\pi| = 0$

$$\left(\frac{\partial^2\pi}{\partial L^2} < 0 \ \wedge \ |H\pi| > 0\right) \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial^2\pi}{\partial K^2} < 0 \ \wedge \ |H\pi| > 0\right)$$

Annahme: Wenn die Produktionsfunktion x die FOC und SOC erfüllt, dann existieren als Lösung des Gleichungssystems $F = (F_1, F_2)$ die Faktornachfragen:

$$L^* = L^*(w, r, p)$$
$$K^* = K^*(w, r, p)$$

Einsetzen in FOC:

$$F_1^* := \quad p\frac{\partial x}{\partial L}\left(L^*(.), K^*(.)\right) - w = 0$$
$$F_2^* := \quad p\frac{\partial x}{\partial K}\left(L^*(.), K^*(.)\right) - r \ = 0$$

2.2.2 Komparative Statik für L^* und K^* in Bezug auf Parameter w (*ceteris paribus*)

Interpretation: Wie verhalten sich die optimalen Inputfaktoren bei einer Änderung des Lohnsatzes w, wenn r und p konstant bleiben?

Differentiation von $F^* = ({F_1}^*, {F_2}^*)$ nach w:

$$\frac{\partial {F_1}^*}{\partial w} = p\frac{\partial^2 x}{\partial L^2} * \frac{dL^*}{dw} + p\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\frac{dK^*}{dw} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial {F_2}^*}{\partial w} = p\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}\frac{dL^*}{dw} + p\frac{\partial^2 x}{\partial K^2}\frac{dK^*}{dw} \qquad = 0$$

Lösen dieses Gleichungssystems für $\frac{dL^*}{dw}$ und $\frac{dK^*}{dw}$ über

a) Cramersche Regel

b) Eliminationsverfahren

Cramersche Regel

Überführe das Gleichungssystem in die Matrizenform:

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} p\frac{\partial^2 x}{\partial L^2} & p\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K} \\ p\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L} & p\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dL^*}{dw} \\ \frac{dK^*}{dw} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung der Cramerschen Regel:

$$\frac{dL^*}{dw} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 1 & p\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K} \\ 0 & p\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dK^*}{dw} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} p\frac{\partial^2 x}{\partial L^2} & 1 \\ p\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L} & 0 \end{vmatrix}$$

Eliminationsverfahren:

$$(F_1^* w) \quad \frac{\partial F_1^*}{\partial w} = p\frac{\partial^2 x}{\partial L^2}\frac{dL^*}{dw} + p\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\frac{dK^*}{dw} - 1 = 0 \qquad | \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial K^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\frac{\partial^2 x}{\partial L^2}\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} \cdot \frac{dL^*}{dw} + p\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} \cdot \frac{dK^*}{dw} - \frac{\partial^2 x}{\partial K^2} = 0$$

$$(F_2^* w) \quad \frac{\partial F_2^*}{\partial w} = p\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}\frac{dL^*}{dw} + p\frac{\partial^2 x}{\partial K^2}\frac{dK^*}{dw} = 0 \qquad | \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K} \cdot \frac{dL^*}{dw} + p\frac{\partial^2 x}{\partial K^2}\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K} \cdot \frac{dK^*}{dw} = 0$$

$(F_1^* w)$ und $(F_2^* w)$ gleichsetzen:

$$p\frac{\partial^2 x}{\partial L^2}\frac{\partial^2 x}{\partial K^2}\frac{dL^*}{dw} + \frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\frac{\partial^2 x}{\partial K^2}\frac{dK^*}{dw} - \frac{\partial^2 x}{\partial K^2} = p\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\frac{dL^*}{dw} + \frac{\partial^2 x}{\partial K^2}\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\frac{dK^*}{dw} \qquad | \frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\frac{\partial^2 x}{\partial K^2}\frac{dK^*}{dw} \text{ kürzt sich weg}$$

$$\Leftrightarrow \quad p \frac{dL^*}{dw}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial L^2}\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial K^2}$$

Vorzeichen: $\frac{dL^*}{dw} < 0,$ da $\frac{\partial^2 x}{\partial L^2}\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K} > 0$ aufgrund der SOC.

Die Arbeitsnachfrage nimmt mit dem Lohnsatz ab.

2.2.3 Verwendung des Satzes von der impliziten Funktion

FOC $\quad p\frac{\partial x}{\partial L} - w = 0 := F_1(L,K;w,r,p)$

$$p\frac{\partial x}{\partial K} - r = 0 := F_2(L,K;w,r,p)$$

Falls die Jacobi-Matrix J_F von $F = (F_1, F_2)$ nicht verschwindet, d.h.

$$|J_F| \neq 0 \qquad \text{für } J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial L} & \frac{\partial F_1}{\partial K} \\ \frac{\partial F_2}{\partial L} & \frac{\partial F_2}{\partial K} \end{pmatrix}$$

dann existieren die Lösungen:

$$L^* = L^*(w,r,p)$$
$$K^* = K^*(w,r,p)$$

Die komparative Statik errechnet sich für L^* und K^* bzgl. *w* wie folgt:

$$\frac{dL^*}{dw} = \frac{-1}{|J_F|}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial w} & \frac{\partial F_1}{\partial K} \\ \frac{\partial F_2}{\partial w} & \frac{\partial F_2}{\partial K} \end{vmatrix} \qquad \frac{dK^*}{dw} = \frac{-1}{|J_F|}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial L} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial L} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Falls die SOC erfüllt ist, dann ist $|J_F| \neq 0$, da $|J_F| = |H_\pi|$ und $|H_\pi| > 0$ gilt.

Dann ergeben sich als explizite Lösungen:

$$\frac{dL^*}{dw} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & p\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K} \\ 0 & p\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p\frac{\partial^2 x}{\partial L^2} & p\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K} \\ p\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L} & p\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial K^2}}{p\left(\frac{\partial^2 x}{\partial L^2}\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}\right)} \qquad \frac{dK^*}{dw} = -\frac{\begin{vmatrix} p\frac{\partial^2 x}{\partial L^2} & -1 \\ p\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p\frac{\partial^2 x}{\partial L^2} & p\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K} \\ p\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L} & p\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}}{p\left(\frac{\partial^2 x}{\partial L^2}\frac{\partial^2 x}{\partial K^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}\right)}$$

2.3 Anwendungsbeispiele

a) Spezifikation der Produktionsfunktion:

Cobb-Douglas: $x = x(L,K) = L^\alpha K^\beta \qquad \text{mit} \qquad 0 < \alpha, \beta < 1$

Für:

	$\alpha + \beta = 1$	konstante Skalenerträge
	$\alpha + \beta > 1$	steigende Skalenerträge
	$\alpha + \beta < 1$	sinkende Skalenerträge

Gewinnmaximierung:

$$\pi = p \cdot x(L,K) - wL - rK = pL^{\alpha}K^{\beta} - wL - rK \quad \rightarrow \quad max_{L,K}$$

FOC:
$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = p\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} - w = 0 \coloneqq F_1$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = pL^{\alpha}\beta K^{\beta-1} - r = 0 \coloneqq F_2$$

SOC:
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} = p\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\beta} < 0 \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K} = p\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1}$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} = pL^{\alpha}\beta(\beta-1)K^{\beta-2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} = p\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1}$$

$$\begin{aligned}|H\pi| &= p^2\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} - (\frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K})^2\right) \\ &= p^2(L^{\alpha}\beta(\beta-1)K^{\beta-2} \cdot K^{\beta}\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2} - \left(\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1})^2\right) > 0\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \alpha\beta(-\alpha-\beta+1) > 0$ $\quad | : \alpha\beta$ (zulässig, weil $\alpha\beta > 0$)
$\Leftrightarrow \alpha + \beta < 1$

d.h. die hinreichende Bedingung für ein eindeutiges Maximum sind sinkende Skalenerträge.
Sei im Folgenden also $\alpha + \beta < 1$:

Dann existieren Lösungen: $\quad L^* = L^*(w,r,p)$ und $K^* = K^*(w,r,p)$

Komparative Statik in Bezug auf Parameter w:

Einsetzen der Lösung in FOC und Cramersche Regel.
$$F_1^* \coloneqq \; p\frac{\partial x}{\partial L}\left(L^*(w,r,p), K^*(w,r,p)\right) - w = 0$$
$$F_2^* \coloneqq \; p\frac{\partial x}{\partial K}\left(L^*(w,r,p), K^*(w,r,p)\right) - r = 0$$

Differentiation von $F^* = (F_1^*, F_2^*)$ nach Parameter w:

$$p\frac{\partial^2 x}{\partial L^2}\frac{dL^*}{dw} + p\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial K}\frac{dK^*}{dw} - 1 = 0$$
$$p\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}\frac{dL^*}{dw} + p\frac{\partial^2 x}{\partial K^2}\frac{dK^*}{dw} \qquad = 0$$

Einsetzen der Ableitung:

$$\left(p\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\beta}\right)\frac{dL^*}{dw} + \left(p\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1}\right)\frac{dK^*}{dw} = 1$$
$$\left(p\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1}\right)\frac{dL^*}{dw} + \left(pL^{\alpha}\beta(\beta-1)K^{\beta-2}\right)\frac{dK^*}{dw} = 0$$

Übertrage in Matrixform: $Ax = b$

wobei $x = \begin{pmatrix} \frac{dL^*}{dw} \\ \frac{dK^*}{dw} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\beta} & p\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1} \\ p\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1} & pL^{\alpha}\beta(\beta-1)K^{\beta-2} \end{pmatrix}$

Cramersche Regel:

$$\frac{dL^*}{dw} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 1 & p\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1} \\ 0 & pL^{\alpha}\beta(\beta-1)K^{\beta-2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dK^*}{dw} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} p\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\beta} & 1 \\ p\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Eliminationsverfahren aus (F_1) und (F_2) und Auflösen nach K:

$$\frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{L^{\alpha}\beta K^{\beta-1}} = \frac{w}{r}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$
$$\Rightarrow K = \frac{w}{r}\frac{\beta}{\alpha} \cdot L$$

Einsetzen in (F_1) und Auflösen nach L:

$$p\alpha L^{\alpha-1}\left(\frac{w}{r}\frac{\beta}{\alpha} \cdot L\right)^{\beta} = w$$
$$p\alpha\left(\frac{w}{r}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta} \cdot L^{\alpha-1+\beta} = w$$
$$\Rightarrow L^* = p^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}} \cdot \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\frac{\beta-1}{\gamma}} \qquad \text{wobei } \gamma := 1-\alpha-\beta$$

Ableiten von L^*nach w:

$$\frac{dL^*}{dw} = p^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1-\beta}{\gamma}} \cdot \frac{\beta-1}{\gamma} w^{\frac{\beta-1-\gamma}{\gamma}}$$

Implizite Differentiation:

FOC: $p\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} - w = 0 \coloneqq F_1$ $\qquad |J_F| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial L} & \frac{\partial F_1}{\partial K} \\ \frac{\partial F_2}{\partial L} & \frac{\partial F_2}{\partial K} \end{vmatrix}$

$p\beta L^{\alpha}K^{\beta-1} - r = 0 \coloneqq F_2$

Formel: $\frac{dL^*}{dw} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial w} & \frac{\partial F_1}{\partial K} \\ \frac{\partial F_2}{\partial w} & \frac{\partial F_2}{\partial K} \end{vmatrix}}{|J_F|} \qquad \frac{dK^*}{dw} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial L} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial L} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{vmatrix}}{|J_F|}$

Die Voraussetzung, dass $K^*(w)$ und $L^*(w)$ existieren, wird durch die SOC gewährleistet.

Bilde und setze ein:

$$\frac{\partial F_1}{\partial L} = p\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\beta}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial K} = p\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial L} = p\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial K} = pL^{\alpha}\beta(\beta-1)K^{\beta-2}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial w} = -1$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial w} = 0$$

b) Separierbare Produktionsfunktion

Sei $x = x(K,L) = L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}$ die Produktionsfunktion.

Gewinnmaximierung:

$$\pi(L,K) = p\left(L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}\right) - wL - rK \rightarrow max_{K,L}$$

FOC: $\frac{\partial \pi}{\partial L} = p\frac{1}{2}L^{-\frac{1}{2}} - w \overset{!}{=} 0$

$\frac{\partial \pi}{\partial K} = p\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}} - r \overset{!}{=} 0$

$\rightarrow L^*(p,w) = \frac{1}{4}\left(\frac{p}{w}\right)^2$

$\rightarrow K^*(p,r) = \frac{1}{4}\left(\frac{p}{r}\right)^2$

SOC: $\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} = -\frac{p}{4}L^{-\frac{3}{2}} < 0$

$\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} = -\frac{p}{4}K^{-\frac{3}{2}} < 0$

$\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} - (\frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L})^2 > 0$ erfüllt, da $\frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} = 0$

Komparative Statik:

$$\frac{dL^*}{dw} = -\frac{1}{2}\frac{p^2}{w^3} < 0$$
$$\frac{dK^*}{dr} = -\frac{1}{2}\frac{p^2}{r^3} < 0$$
$$\frac{dL^*}{dr} = 0$$
$$\frac{dK^*}{dw} = 0$$

2.4 Envelopen-Theorem (Umhüllungssatz)

Problem: (P) $\max_x z = f(x, \alpha)$

Wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ einen Parametervektor darstellt und $x = (x_1, \dots, x_n)$ einen Variablenvektor bezeichnet.

Sei x^* die Lösung von (P) mit $z^* = f(x^*, \alpha)$, dann gilt:

$$f(x^*, \alpha) = f(x^*(\alpha), \alpha) = f^*(\alpha)$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial f^*}{\partial \alpha_j} \qquad \text{mit } j = 1, \dots, m$$

Das Envelopen-Theorem besagt:

Eine Veränderung der indirekten Zielfunktion z^* mit $z^* = f(x^*, \alpha)$ infolge einer Veränderung von α_j, entspricht der partiellen Ableitung von f^* nach α_j.

Kapitel 3: Integration

Literatur

- D.W. Hands (2004): Introductory Mathematical Economics, S. 131 - 139.

3.1 Konsumentenrente

Betrachtet wird eine Nutzenfunktion $U = U(q)$ mit einer Gütermenge $q > 0$ und einem Grenznutzen $MU(q)$. Die Nachfrage nach q entspricht $MU(q)$, da für jeden Marktpreis p die nachgefragte Menge q^* die Bedingung $MU(q^*) = p$ erfüllt.

Die Konsumentenrente für eine Menge q bei gegebenem Preis p berechnet sich durch:

$$CS(q) = \int_0^q MU(q^0)dq^0 - pq$$

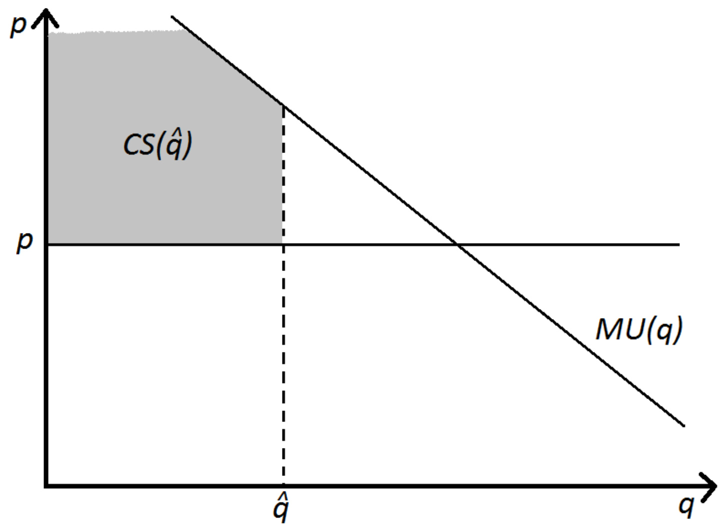

Abbildung 2: Konsumentenrente

Beispiel:

$MU(q) = a - bq \qquad\qquad a, b > 0$

$$CS(\hat{q}) = \int_0^{\hat{q}} (a - bq)dq - p\hat{q}$$
$$= \left[aq - \frac{bq^2}{2}\right]_0^{\hat{q}} - p\hat{q}$$
$$= a\hat{q} - \frac{b\hat{q}^2}{2} - p\hat{q}$$

Konsumentenrente bei optimaler Nachfrage:

Für die optimale Nachfrage q^* gilt $CS(q^*) = \int_0^{q^*} MU(q^0)dq^0 - pq^*$

$$\max_q \int_0^q MU(q^0)dq^0 - pq$$

$$\frac{dCS}{dq} = \frac{d}{dq}\int_0^q MU(q^0)dq^0 - p = 0$$

$$MU(q) - p = 0$$

$$p = MU(q)$$

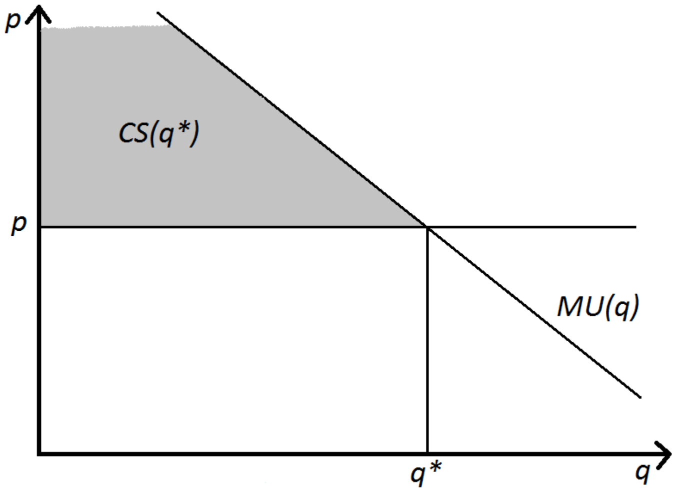

Abbildung 3: Konsumentenrente bei optimaler Nachfrage

Beispiel:

$$a - bq = p$$

$$q = \frac{p-a}{-b}$$

$$= \frac{p}{-b} + \frac{a}{b}$$

$$\int = \frac{p^2}{-2b} + \frac{a}{b}p$$

<u>Integration über die p – Achse</u>

Inverse Nachfrage $MU(q) \rightarrow MU^{-1}(p)$

$$\int_p^\infty MU^{-1}(p)\, dp = 0$$

Geben Sie hier eine Formel ein.

3.2 Produzentenrente

Gegeben sei ein Unternehmen auf einem kompetitiven Markt, auf dem ein Gut zum Preis p gehandelt wird. Das Unternehmen produziert die Menge q dieses Gutes bei Grenzkosten von $MC(q)$ und bietet dieses an.

Produzentenrente:

Die Produzentenrente bei Output q und gegebenem Preis p berechnet sich durch:

$$PS(q) = pq - \int_0^q MC(q^0)dq^0$$

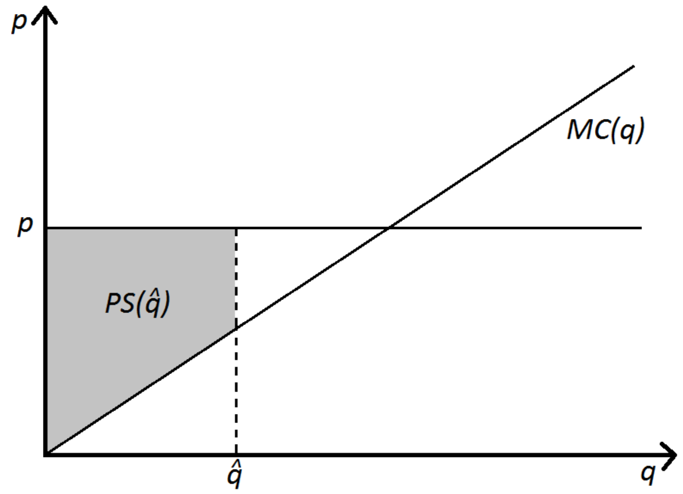

Abbildung 4: Produzentenrente

Produzentenrente im Gewinnmaximum:

Betrachtet wird q^* mit $p = MC(q^*)$:

$$PS(q^*) = pq^* - \int_0^{q^*} MC(q^0)dq^0$$

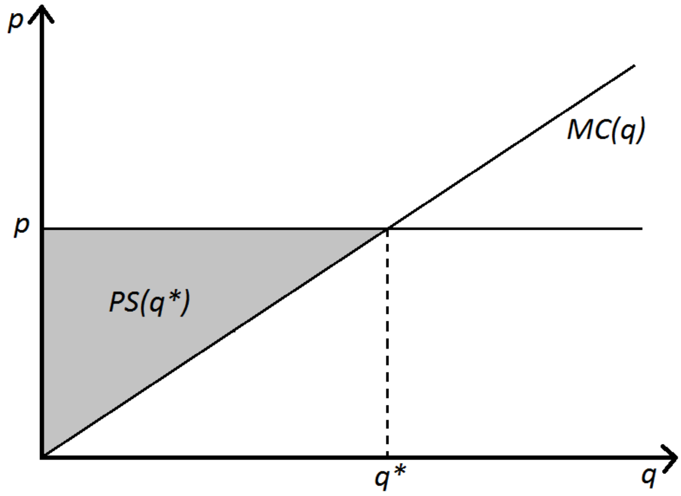

Abbildung 5: Produzentenrente im Gewinnmaximum

$max_q \left(pq - \int_0^q MC(q^0)dq^0\right)$

$$\frac{d}{dq} = p - MC(q) = 0$$

$\rightarrow q^*(p)$

3.3 Weitere Anwendungsbereiche der Integration

Lösung von Differentialgleichungen:

Eine homogene Differentialgleichung erster Ordnung ist von der Form:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Beispiel einer homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\dot{x}(t) + ax(t) = 0 \qquad a \in \mathbb{R} \text{ (konstanter Parameter)}$$
$$x(0) = x_0 > 0$$

Die boundary condition $x(0) = x_0$ dient zur Bestimmung der Integrationskonstanten.

Beispiel einer inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\dot{x}(t) + ax(t) = b \qquad a \in \mathbb{R}, b > 0$$

Charakteristisch für Differentialgleichungen: Die Variable x kommt gleichzeitig als Ableitung nach der Zeit und als Variable in der Gleichung vor.

Lösung der Differentialgleichung (Beispiel):

$$\dot{x}(t) = -ax(t) \Leftrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = -a$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = -\int a dt \qquad \text{unbestimmte Integration}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{x(t)} \frac{dx}{dt} dt = -a \int 1 dt$$
$$\Leftrightarrow \ln|x(t)| + C_0 = -at + C_1$$

Isolierung der Integrationskonstanten (C_0, C_1)

$$\Leftrightarrow e^{\ln|x(t)|+C_0} = e^{-at+C_1}$$

$$\Leftrightarrow x(t)e^{C_0} = e^{-at+C_1}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = e^{-at} \cdot \underbrace{e^{C_1-C_0}}_{const=:C}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = e^{-at} \cdot C$$

Bestimmung der Integrationskonstanten C über $t = 0$ mit $x(0) = C$:

$$\Leftrightarrow C = x_0, \text{ da } x(0) = x_0$$

Lösung: $\Leftrightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{-at}$ (x_0: Anfangswert, a: Wachstumsrate)

Beispiel:

Sei $g_C = \frac{\dot{C}}{C} = g$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\dot{C}}{C} dt = \int g dt$$
$$\Leftrightarrow \ln|C| + Konst = gt$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln|C| + Konst} = e^{gt}$$
$$C \cdot e^{Konst} = e^{gt}$$

Für $t = 0$: $C(0) = 1 \cdot e^{-Konst}$

$$C(0) = e^{-Konst}$$
$$\Rightarrow C(t) = C(0) \cdot e^{-gt}$$

Kapitel 4: Optimierung unter Nebenbedingungen

Literatur

- D.W. Hands (2004): Introductory Mathematical Economics, S. 275 - 277 und S. 279.

Wir unterscheiden in:

a) Constraints in Gleichungsform (Lagrange-Verfahren)
b) Ungleichungen als Constraints (Kuhn-Tucker-Verfahren)
c) Mischformen (Kuhn-Tucker)

4.1 Allgemeiner Ansatz

$$P \begin{cases} \max_x f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \\ s.t.\, g_1(x) = 0 \\ \quad \vdots \\ \quad g_m(x) = 0 \end{cases}$$

$g_1, \dots, g_m$ Nebenbedingungen in impliziter Form

Theorem: Seien $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ Lösungen von (P). Die Bedingung 1. Ordnung für x^* lauten:
Es existieren $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ (Lagrange-Multiplikatoren), sodass:

$$f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_{ji}(x^*) = 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

und

$$g_j(x^*) = 0 \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, m$$

f_i bezeichnet $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ und g_{ji} bezeichnet $\frac{\partial g_j}{\partial x_i}$

Verfahren:

Bilde die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) \to max_{\lambda,x}$

FOC:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_i} = f_i(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}(x) = 0$$
$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda_j} = g_j(x) = 0$$

Gleichungssystem lösen: $x_1^*, \dots, x_n^*$ Lösungen
$\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$

4.2 Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren

Angenommen: $g(x) = b - h(x) = 0$ mit $b > 0$ (Skalar)

Es kann gezeigt werden, dass $\lambda^* = \frac{df(x^*)}{db}$ gilt.

Beweis durch Anwendung des Envelopen-Theorems nicht gefordert.

Der Lagrange-Multiplikator gibt an, um wieviel der Zielwert steigt, wenn die Restriktion gelockert wird. Der Parameter b kann dabei als Ressourcen-Constraint gesehen werden.

4.3 Anwendungsbeispiel

Kostenminimierung:

$$\min_{K,L} rK + wL$$

$$\begin{aligned} s.t.\ \ & \bar{x} = x(K,L) \\ & \bar{x} > 0 \end{aligned}$$

Produktionsfunktion: $x(K,L)$
Faktorpreise von Kapital und Arbeit: r, w
Kapital- bzw. Arbeitseinsatz: K, L
Produktionsniveau: $\bar{x}$

Lagrange-Funktion: $\mathcal{L}(K,L,\lambda) = rK + wL + \lambda(\bar{x} - x(K,L))$

FOC:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial K} = r - \lambda \frac{\partial x}{\partial K} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial L} = w - \lambda \frac{\partial x}{\partial L} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{x} - x(K,L) = 0 \qquad (3)$$

Aus (1) und (2): $\frac{\frac{\partial x}{\partial K}}{\frac{\partial x}{\partial L}} = \frac{r}{w}$

Grenzrate der Transformation in der Produktion = Faktorpreisverhältnis

Für $x = K^{1/2}L^{1/2}$ gilt $\frac{L}{K} = \frac{r}{w}$

Faktoreinsatzverhältnis gleich dem umgekehrten Faktorpreisverhältnis

Unterschied: Dynamisches-Statisches Modell

Statisch:

$$U(R) \rightarrow \max_R$$

$$R \leq \bar{R}, \bar{R} > 0$$

$$Lagrange : (Anm. R = \bar{R})$$

$$U(R) + \lambda(\bar{R} - R) \rightarrow \max_{R,\lambda}$$

$$FOC : \frac{\partial U}{\partial R} + (-\lambda) = 0 \qquad R^* = \overline{R}$$

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial R}(R) \rightarrow \lambda^* = \frac{\partial U}{\partial R}(\bar{R})$$

Kapitel 5: Dynamische Optimierung unter Nebenbedingungen

5.1 Wachstumstheorie

5.1.1 Ressourcenextraktionsproblem

S: = Ressourcenbestand zum Zeitpunkt t (Bestandsgröße)
R: = Ressourcenextraktion (Stromgröße bzw. Kontrollvariable)

Bewegungsgleichung für S: $\dot{S} = -R$
Ressource stiftet Nutzen U: $U = U(R)$

Konsumenten maximieren abdiskontierten Lebenszeitnutzenstrom:

$$\int_0^\infty U(R)e^{-\rho t} dt$$

Der Nutzenstrom wird von $t = 0$ bis $t = \infty$ maximiert. Die Zeitpräferenzrate ρ gibt an, wie zukünftige Nutzen zu gewichten sind. Wenn $\rho > 0$, so wird bei der Optimierung heutigem Nutzen der Ressource ein höherer Wert beigemessen als zukünftigem Nutzen.

Optimierungsproblem: $max_R \int_0^\infty U(R)e^{-\rho t}\, dt$

s.t. $\dot{S} = -R$

$S(0) = S_0 > 0$ gegeben

5.1.2 Lösung des Ressourcenextraktionsproblems

Hamiltonian: $H = U(R) - \lambda R \quad \rightarrow \quad \max_{S,R}$

FOCs: (1) $\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{\partial U}{\partial R} - \lambda \overset{!}{=} 0$

(2) $\frac{\partial H}{\partial S} \overset{!}{=} - \dot{\lambda} + \rho\lambda$

Aus (2): $g_\lambda \coloneqq \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho$

Aus (1): $\dot{\lambda} = \frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\frac{\partial R}{\partial t}$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\cdot \dot{R} \cdot R}{\frac{\partial U}{\partial R}\cdot R}$$

Daraus folgt: $\rho = \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\cdot R}{\frac{\partial U}{\partial R}} \cdot \frac{\dot{R}}{R}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\dot{R}}{R} = \rho \cdot \left(\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\cdot R}{\frac{\partial U}{\partial R}}\right)^{-1} =: g_R$$

Für CRRA-Funktion:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\rho}{\sigma}$$

mit $\sigma = \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\cdot R}{\frac{\partial U}{\partial R}}$ (konstant) für die Nutzenfunktion vom CRRA-Typ (Constant Relative Risk Aversion):

$$U(R) = \frac{R^{\sigma-1} - 1}{\sigma - 1}$$

5.1.3 CASS-KOOPMANS Wachstumsmodell (Hands S. 184-185)

Produktionsfunktion: $F(K, L) = Y$

Konstante Skalenerträge: $f(k, 1) = y$ mit $y := Y/L$, $k := K/L$

Kapitalakkumulation: $\dot{k} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\cdot\frac{K}{L}$

$= \frac{Y-C}{L} - n\cdot k = y - c - n\cdot k$

Bevölkerungswachstum: $\frac{\dot{L}}{L} = n$ wobei $n > 0$ (exogen)

National Accounts (Gesamtwirtschaftliches Gleichgewicht):

$$C + \dot{K} = Y$$

Nutzen des Konsums: $u = u(c)$

Lebensnutzen (abdiskontiert): $\int_0^\infty u(c)e^{-\rho t}dt$

Optimierungsproblem: $\max_c \int_0^\infty u(c)e^{-\rho t}dt$

s.t. $\dot{k} = f(k,1) - c - nk$

$\frac{\dot{L}}{L} = n$ gegeben

$K(0) = K_0, L(0) = L_0$ gegeben

5.2 Lösungsverfahren Optimal Control

Optimal Control ist ein Verfahren zur Lösung intertemporaler Optimierungsprobleme in der Wachstumstheorie.

Literatur (u.a.): Sala-i-Martin/Barro, Economic Growth, S. 98.

Beispiel: Ein Unternehmen möchte seinen Gewinn über mehrere Zeitperioden maximieren. Der Gewinn ist abhängig von aktuellen betriebswirtschafltichen Entscheidungen (Kontrollvariablen) und dem Kapitalstock (Bestandsgröße) des Unternehmens. Die Kontrollvariable (z.B. bzgl. Angebotsmenge) kann das Unternehmen frei wählen. Die Bestandsgröße des Kapitals resultiert aus den Entscheidungen vorheriger Zeitperioden und kann sich über die Zeit verändern (ein Anfangswert für $t = 0$ ist gegeben). Das Unternehmen wird, unter Berücksichtigung der Wirkung auf den Kapitalstock, die Kontrollvariablen so wählen, dass der Gewinn über die Zeit hinweg maximiert wird. Dabei werden aktuelle Gewinne in der Regel stärker gewichtet als zukünftige Gewinne (d.h. $\rho > 0$).

Optimierungsproblem: $\max_{c(t)} V(0) = \int_0^T v(k(t), c(t)) e^{-\rho t} dt$

s.t. a) $\dot{k}(t) = g(k(t), c(t), t)$

b) $k(0) = k_0 > 0$ gegeben

c) $lim_{t\to\infty}[\lambda(t)k(t)] \rightarrow 0$

$V(0)$: diskontierter Wert des Periodennutzens

ρ: Diskontierungsrate
T: Endzeitpunkt der Optimierung ($T = \infty$ ebenfalls möglich)
$k(t)$: Bestandsvariable
$c(t)$: Kontrollvariable

Erste Bedingung (a): Bewegungsgleichung der Bestandsgröße

Zweite Bedingung (b): k_0 ist der Anfangswert der Bestandsgröße bei $t = 0$

Dritte Bedingung (c): Die Transversalitätsbedingung stellt sicher, dass der Wert der Bestandsgröße auch im Endzeitpunkt nicht negativ wird, wobei $\lambda(t)$ den Schattenpreis angibt.

Kochbuch-Prinzip (Optimal Control)

Schritt 1: Stellen Sie (Current Value)-Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$ auf.

$$\mathcal{H} = v(k,c) + \lambda(t)g(k,c,t)$$

Schritt 2: Nehmen Sie Ableitung von $\mathcal{H}$ nach der Kontrollvariablen und setze diese gleich Null.

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c} = \frac{\partial v}{\partial c} + \lambda\ \frac{\partial g}{\partial c} \overset{!}{=} 0$$

Schritt 3: Nehmen Sie Ableitung von $\mathcal{H}$ nach der Bestandsgröße und setze diese gleich $-\dot{\lambda} + \rho\lambda$.

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial k} = \frac{\partial v}{\partial k} + \lambda\ \frac{\partial g}{\partial k} \overset{!}{=} -\ \dot{\lambda} + \rho\lambda$$

Schritt 4: Benutzen Sie Transversalitätsbedingung in der folgenden Form.

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\,\lambda(t)k(t) \to 0$$

Anmerkung: Es können auch mehrere Bestandsgrößen und Kontrollvariablen in einer Optimierung berücksichtigt werden. Führen Sie dann neue Variablen als Schattenpreise für die verschiedenen Bestandsgrößen ein.

Aus den First-Order-Conditions ergeben sich die Wachstumsraten der Kontroll- und Bestandsvariablen als Lösung des Gleichungssystems.

$$\frac{\partial v}{\partial c} + \lambda\frac{\partial g}{\partial c} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial k} + \lambda\frac{\partial g}{\partial k} = -\dot{\lambda} + p\lambda$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial c^2}\dot{C} + \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial c} + \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial c^2}\dot{C} = 0$$

Mithilfe ihrer Wachstumsrate lässt sich der Pfad für eine Kontroll- oder Bestandsvariable berechnen, wobei die Transversalitätsbedingung zur Bestimmung der Integrationskonstanten dient.