Lagrange Verfahren Lösungen

1 Kostenminimierung

Optimierungsproblem Das Optimierungsproblem des Unternehmens sieht wie folgt aus:

$\min_{K,L} rK + wL$
so dass $\bar{Y} = K^{\alpha}L^{\beta}$

Lagrange Funktion $\mathscr{L} = rK + wL - \lambda(\bar{Y} - K^{\alpha}L^{\beta})$

Bedingungen erster Ordnung Wir leiten die Lagrange Funktion nach den Entscheidungsvariablen K, L, und nach dem Lagrange-Multiplikator λ ab; setzen das ganze gleich 0.

$$\frac{d\mathscr{L}}{dK} = r + \lambda \alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = 0 \tag{1}$$
$$\frac{d\mathscr{L}}{dL} = w + \lambda \beta K^{\alpha}L^{\beta-1} = 0 \tag{2}$$
$$\frac{d\mathscr{L}}{d\lambda} = \bar{Y} - K^{\alpha}L^{\beta} = 0 \tag{3}$$

Gleichungssystem Lösen Wir stellen zunächst Gleichung (1) und (2) um:

$$\lambda \alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = -r \tag{4}$$
$$\lambda \beta K^{\alpha}L^{\beta-1} = -w \tag{5}$$

Dividieren dann (4) durch (5).

$$\begin{aligned}\frac{\lambda\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{\lambda\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}} &= \frac{r}{w}\\ \Leftrightarrow \frac{\alpha K^{-1}}{\beta L^{-1}} &= \frac{r}{w}\\ \Leftrightarrow \frac{\alpha L}{\beta K} &= \frac{r}{w} \qquad (6)\end{aligned}$$

Stellen nun (6) nach L um.

$$L = \frac{r\beta K}{w\alpha} \qquad (7)$$

Setzen nun (7) in (3) ein.

$$\begin{aligned}\bar{Y} - K^{\alpha}\left(\frac{r\beta K}{w\alpha}\right)^{\beta} &= 0\\ \Leftrightarrow \bar{Y} - K^{\alpha}K^{\beta}\left(\frac{r\beta}{w\alpha}\right)^{\beta} &= 0\\ \Leftrightarrow \bar{Y} = K^{\alpha}K^{\beta}\left(\frac{r\beta}{w\alpha}\right)^{\beta}&\\ \Leftrightarrow \bar{Y} = K^{\alpha+\beta}\left(\frac{r\beta}{w\alpha}\right)^{\beta}&\\ \Leftrightarrow \bar{Y}\left(\frac{r\beta}{w\alpha}\right)^{-\beta} &= K^{\alpha+\beta}\\ \Leftrightarrow \bar{Y}\left(\frac{w\alpha}{r\beta}\right)^{\beta} &= K^{\alpha+\beta}\\ \Leftrightarrow \bar{Y}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w\alpha}{r\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} &= K \qquad (8)\end{aligned}$$

Haben also eine Lösung für K gefunden. Setzen diese in (7) ein.

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{r\beta}{w\alpha}\bar{Y}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w\alpha}{r\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \\
\Leftrightarrow L &= \left(\frac{w\alpha}{r\beta}\right)^{-1}\bar{Y}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w\alpha}{r\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \\
\Leftrightarrow L &= \bar{Y}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w\alpha}{r\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1} \\
\Leftrightarrow L &= \bar{Y}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w\alpha}{r\beta}\right)^{\frac{\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} \\
\Leftrightarrow L &= \bar{Y}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w\alpha}{r\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} \\
\Leftrightarrow L &= \bar{Y}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{r\beta}{w\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Durch einsetzen von (8) und (9) in (1) oder (2) lässt sich schließlich auch λ bestimmen (Hausaufgabe!).

2 Nutzenmaximierung unter einer Budgetrestriktion

Optimierungsproblem max $U(x,y) = \ln(x) + \ln(y) \quad s.d. \quad p_x x + p_y y = I.$

Lagrangefunktion $\mathscr{L}(x,y) = \ln(x) + \ln(y) + \lambda(p_x x + p_y y - I)$

Bedingungen erster Ordnung Um die Bedinungen erster Ordnung aufzustellen, leiten wir die Lagrange-Funktion nach den Entscheidungsvariablen und dem

Lagrange-Multiplikator ab, und setzen diese Ableitungen gleich 0.

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = \frac{1}{x} + \lambda p_x \overset{!}{=} 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = \frac{1}{y} + \lambda p_y \overset{!}{=} 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = p_x x + p_y y - I \overset{!}{=} 0 \tag{3}$$

Bedinungen erster Ordnung Lösen Stellen (1) nach x und (2) nach y um.

$$x = -\frac{1}{\lambda p_x} \tag{4}$$

$$y = -\frac{1}{\lambda p_y} \tag{5}$$

Setzen nun (4) u. (5) in (3) ein.

$$\begin{aligned}
p_x \left(-\frac{1}{\lambda p_x}\right) + p_y \left(-\frac{1}{\lambda p_y}\right) - I = 0 \\
\Leftrightarrow p_x \left(-\frac{1}{\lambda p_x}\right) + p_y \left(-\frac{1}{\lambda p_y}\right) = I \\
\Leftrightarrow p_x \left(\frac{1}{\lambda p_x}\right) + p_y \left(\frac{1}{\lambda p_y}\right) = -I \\
\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\right) + \left(\frac{1}{\lambda}\right) = -I \\
\Leftrightarrow \frac{2}{\lambda} = -I \\
\Leftrightarrow \lambda = \frac{-2}{I}
\end{aligned} \tag{6}$$

Haben nun eine Lösung für λ. Setzen diese in (4) u. (5). Bekommen schließlich:

$$x = \frac{I}{2p_x} \tag{7}$$

$$y = \frac{I}{2p_y} \tag{8}$$