Enveloppen Theorem

Sei v(a) der Optimalwert eines Maximierungsproblems:

```
v[a] = Max[f[x, a], x]
```

wobei a ein Parametervektor ist

```
a = {a1, ..., an}
```

Dann besagt das Enveloppentheorem, dass die Ableitung der indirekten Zielfunktion nach einer Kompenente von a gleich der Ableitung der direkten Zielfunktion nach derselbe Komponente am Optimum ist

```
dv / dai = df / dai (x[a], a)
```

d.h. die Zielfunktion wird zunächst nach ai abgeleitet und dann wird das Optimum x[a] und der Parametervektor a in die Zielfunktion eingesetzt.

Aufgabe

Wir betrachten ein Unternehmen welches unter Einsatz von Kapital k und Arbeit l ein Gut Y herstellt. Die Technologie sei durch eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion gegeben.

In[1]:= `y = (l^a1) * (k^a2)`

Out[1]= $k^{a2}\, l^{a1}$

Kapital und Arbeit bezieht das Unternehmen zum Zins r und Lohnsatz w und kann sein Produkt zum Preis p absetzen. Dabei a1 + a2 < 1 und a1, a2 >0

1. Stellen Sie das Optimierungsproblem des Unternehmens auf.
2. Wenden Sie das Enveloppentheorem an, um die Änderung des Unternehmensgewinns bei Parameteränderungen zu analysieren.

Nr. 1

Gewinnfunktion des Unternehmens

In[2]:= `pi = p * y - r * k - w * l`

Out[2]= $k^{a2}\, l^{a1}\, p - k\, r - l\, w$

Maximierungsproblem:
Maximiert wird der Gewinn pi nach den Entscheidungsvariablen k und l

```
Max[pi, {k, l}]
```

Nr. 2

Wir untersuchen Beispielhaft eine Änderung des Preises p.
Leiten also einfach den Gewinn pi nach dem Preis p ab:

In[∘]:=
```
D[pi, p]
```

Out[∘]= $k^{a2}\, l^{a1}$

was laut Enveloppentheorem der Ableitung von pi nach p entspricht.

Bekommen also wieder die Produktionsfunktion raus.
Untersuchen nun die Änderung des Gewinns mit folgendem Ansatz:

$$dpi = dpi / dp\, dp$$

Setzen nun die Ableitung ein:

$$dpi = k^{a2}\, l^{a1}\, dp$$

Da nun die Produktionsfunktion y=$k^{a2}\, l^{a1}$ positiv sein muss, so ist also die Gewinnänderung positiv, wenn dp positiv ist; und umgekehrt, der Gewinn fällt (dpi negativ), wenn der Preis fällt (dp negativ).

Die Ableitungen nach den restlichen Parameter sehen folgendermaßen aus (in der angegeben Reihenfolge:

In[3]:=
```
parameter = {p, r, w, a1, a2};
(diff = D[pi, {parameter}]) // TableForm
```

Out[4]//TableForm=

$k^{a2}\, l^{a1}$
$-k$
$-l$
$k^{a2}\, l^{a1}\, p\, \mathrm{Log}[l]$
$k^{a2}\, l^{a1}\, p\, \mathrm{Log}[k]$

Bsp.
$d$pi = $d$pi/dr dr
$d$pi = -k dr
Wenn dr > 0, dann dpi < 0

Die Vorzeichen der Ableitungen in derselben Reihenfolge
Positiv?

In[∘]:=
```
assumptions = Fold[(#1 && #2) &, (# > 0) & /@ parameter] && ((a1 + a2) < 1) && k > 0 && l > 0
```

Out[∘]=
```
p > 0 && r > 0 && w > 0 && a1 > 0 && a2 > 0 && a1 + a2 < 1 && k > 0 && l > 0
```

In[∘]:=
```
Assuming[assumptions, Simplify[(# > 0) & /@ diff]] // TableForm
```

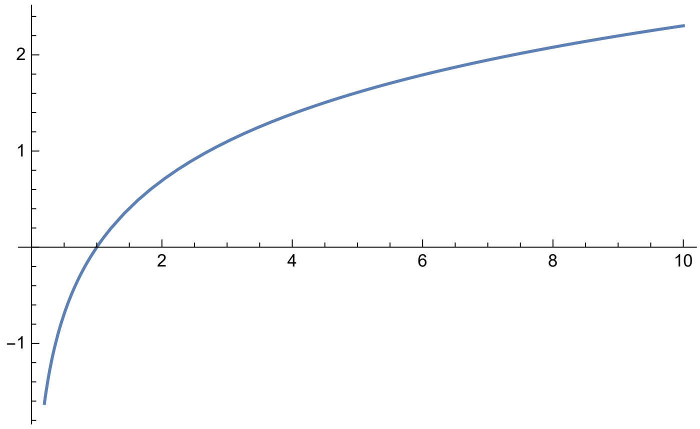
Out[∘]//TableForm=
```
True
False
False
Log[l] > 0
Log[k] > 0
```

Zu den letzten beiden Ableitungen: Wenn Ableitung nach a1 oder a2 positiv sein soll, heißt das, dass Log[l] und Log[k] positiv sein müssen.

Sehen also dass der Gewinn mit steigendem Preis steigt, mit steigenden Inputkosten fällt und die Ableitung nach a1 und a2 davon abhängt, welchen Wert l bzw k hat.
Erinnerung:

```
In[◦]:= Plot[Log[x], {x, 0, 10}, PlotLegends → Automatic]
```

Out[◦]=



Logarithmus ist negativ zwischen 0 und 1 und wird positiv bei x>1

Domar-Modell

Gegeben:

1. Sparquote s ist konstant
2. Produktivität des Kapitals r ist konstant
3. Kapitaländerungen gleich Investitionen
4. Vollauslastung: Output Y gleich Produktionskapazität κ

Aufgabe:

1. Modellieren Sie obige Annahmen
2. Leiten Sie eine Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung des Kapitals her
3. Lösen die Differentialgleichung

Nr.1

1. I=sY
2. r = κ/K   <=> κ = r*K
3. dK/dt = I
4. Y = κ

Nr. 2

Setzen 1. in 3. ein:

5. dK/dt = sY

Setzen 4. in 5. ein

6. dK/dt = sκ

Setzen 2. in 6. ein

7. dK/dt = s*r*K

Dies ist eine Differentialgleichung für K wie gefordert

Nr. 3

Lösen die Differentialgleichung nun für die Funktion K.

Bringen das Differential auf die rechte Seite:
8. dK = s*r*K * dt

K auf die linke Seite:
9. dK/K = s*r* dt

Integrieren nun beide Seiten:
$\int dK / K = \int s * r \, dt$

(Linke Seite: $\int dK / K = \int 1 / K \, dK$)

Bekommen für die linke bzw. rechte Seite:
Log[K] = s*r*t + C

Wenden Exponentialfunktion an auf beide Seiten:
K[t] = Exp[s*r*t + C] = Exp[s*r*t]*Exp[C]

Wobei Exp[C] = K[0]
(da K[0]=Exp[s*r*0]*Exp[C] = 1 * Exp[C] = Exp[C])

Also (nach Ersetzen von Exp[C] durch K[0])
K[t] = K[0] * Exp[s*r*t]

Wie entwickeln sich die anderen Variablen?

Lösen in 2. eingesetzt:
κ = r*K[0] * Exp[s*r*t]

Das in 4. eingesetzt:
Y = r*K[0] * Exp[s*r*t]

Das in 1. eingesetzt
I = s*r*K[0] * Exp[s*r*t]