Arbeitsblatt zur Kapitel 1, Mathematische Wirtschaftstheorie

Bitte bearbeiten Sie das erste Kapitel des Skripts im Selbststudium und lösen Sie dazu das folgende Arbeitsblatt. Bei Fragen können Sie sich an Radomir Pestow (radomir.pestow@wirtschaft.tu-chemnitz.de) wenden. Die Lösungen werden in der nächsten Übung besprochen.

1 Konsumenten

Wir nennen eine Funktion U eine Nutzenfunktion, wenn U die Präferenzordnung eines Konsumenten repräsentiert, d.h. der Funktionswert auf einem Güterbündel x soll größer gegenüber einem anderen Güterbündel y sein, immer dann, wenn der Konsument Güterbündel x gegenüber Güterbündel y präferiert. In Formeln:

$$U(x) > U(y) \Leftrightarrow \text{Konsument präferiert } x \text{ gegenüber } y$$

Im Folgenden werden wir einige wichtige Eigenschaften von Nutzenfunktionen näher untersuchen.

1.1 Grenznutzen

Der Grenznutzen MU eines Gutes x ist der zusätzliche Nutzen, der durch eine weitere Konsumeinheit erzeugt wird (nachdem bereits eine gewisse Menge von x konsumiert wurde)

$$MU_x(x) := \frac{\partial U}{\partial x}$$

Aufgabe Berechnen Sie allgemein den Grenznutzen für x, y bei folgenden Nutzenfunktionen:

a) (eine separierbare, additive Nutzenfunktion) $U(x,y) := \alpha \log(x) + \beta \log(y)$

b) (eine Cobb-Douglas Nutzenfunktion) $U(x,y) := x^{1/2}y^{1/2}$

c) (eine Quasi-Lineare Nutzenfunktion mit Sättigung im nicht-linearen Term) $U(x,y) := x + (by - ay^2)$

1.2 Indifferenzkurven

Die Indifferenzkurve IU einer Nutzenfunktion U zu einem Nutzenniveau $\bar{U}$ ist der geometrische Ort aller Güterbündel x, an denen U den Wert $\bar{U}$ annimmt.

$$U(x) = \bar{U}$$

Der Konsument ist gegenüber zwei Güterbündeln auf der Indifferenzkurve indifferent, da sie für ihn denselben Nutzen erzeugen.

Bei zwei Gütern lässt sich die Indifferenzkurve in der Regel als eine Kurve in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darstellen.

Aufgabe Zeichnen Sie die Indifferenzkurven folgender Nutzenfunktionen für die Niveaus $\bar{U} = 1, 2, 3$, indem sie die Gleichungen nach einem der Terme umstellen (und an einigen Stützpunkten auswerten). Dabei sollen sich x u. y in den Grenzen von 0 bis 10 bewegen.

a) $U(x,y) := x + (y - \frac{1}{2}y^2)$

b) $U(x,y) := x^{1/2}y^{1/2}$

c) $U(x,y) := \frac{1}{2}\log(x) + \frac{1}{2}\log(y)$ (das Niveau $\bar{U} = 3$ kann hier ausgelassen werden)
Tipp: Verwenden Sie die folgende Eigenschaft der e Funktion um die Gleichung (bspw.) nach y um zu stellen $e^{\log(y)} = y$.

1.3 Substitutionsraten

Die Grenzrate der Substitution *MRS* gibt an wieviel von einem Gut x in Austausch für ein anderes Gut y aufgegeben werden muss, so dass der Nutzen gleich bleibt.

$$MRS_{x,y} := \frac{MU_x}{MU_y}$$

Die Grenzrate der Substition entspricht dem Betrag der Steigung der Tangente an der Indifferenzkurve in einem gegebenen Punkt.

Aufgabe Berechnen Sie die Grenzrate der Substition für folgende Funktionen:

a) $U(x,y) := \alpha \log(x) + \beta \log(y)$

b) $U(x,y) := x^{1/2} y^{1/2}$

c) $U(x,y) := x + (by - ay^2)$

1.4 Budgetrestriktion

Unter deiner Budgetrestriktion versteht man eine Beschränkung der Handelsmöglichkeiten eines Konsumenten aufgrund seines verfügbaren Budgets ausgedrückt durch eine Budgetgleichung.

Die Budgetgerade ist der geometrische Ort aller Güterbündel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die sich sein Konsument zu gegebenen Preisen $p_1, \ldots p_n$ bei Verausgabung seines Einkommens I leisten kann. Diese hat in der Regel folgende Form (wobei auch das Einkommen von den Entscheidungen des Konsumenten abhängen kann)

$$I = \sum_i p_i x_i$$

Aufgabe Zeichnen Sie die Budgetgerade für obige Gleichung für den 2-Güter Fall (also $I = p_1 x_1 + p_2 x_2$ mit folgenden Werten in ein Koordinatensystem:

a) $I = 1, p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}$

b) $I = 2, p_1 = 2, p_2 = 1$

c) $I = 3, p_1 = 1, p_2 = 3$

2 Produzenten

2.1 Gewinnfunktion u. Isogewinnlinien

Der Gewinn π eines Unternehmens sind dessen Einnahmen abzüglich der Ausgaben.
Eine Isogewinnlinie ist der geometrische Ort aller Produktionspläne x, in denen der Gewinn des Unternehmens einem gegebenen Niveau $\bar{\pi}$ gleich ist.

$$\pi(x) = \bar{\pi}$$

Aufgabe Zeichnen Sie die Isogewinnlinien für die Gewinnfunktion $\pi = p_1 x_1 + p_2 x_2$ zu den folgenden Werten:

a) $p_1 = 2, p_2 = 1$, $\bar{\pi} = 1, 2, 3$

b) $p_1 = 1, p_2 = 3$, $\bar{\pi} = 1, 2, 3$

2.2 Transformationskurve

Die Transformationskurve (oder Produktionsmöglichkeitenkurve) $T(x) = 0$ beschreibt die möglichen Produktionspläne eines Unternehmens bei effizienter Ressourcennutzung. Sie wird aus der Produktionsfunktion und Ressourcenausstattung hergeleitet.

Aufgabe Zeichnen Sie folgende Transformationskurven

a) $T(x,y) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 10 = 0$
(Tipp: Stellen Sie, wie weiter oben, die Gleichung nach einer der Variablen um)

b) $2x_1^2 + 5x_2 - 20 = 0$

2.3 Grenzrate der Transformation

Die Grenzrate der Transformation *MRS* beschreibt, um wieviel die Produktion eines Gutes x_1 zurückgefahren werden muss, um eine Einheit mehr von Gut x_2 zu produzieren.

$$MRS_{1,2} = -\frac{\partial T/\partial x_1}{\partial T/\partial x_2}$$

Die Grenzrate der Transformation entspricht der Steigung der Tangente an der Transformationskurve in einem Punkt.

Aufgabe Berechnen Sie die Grenzrate der Transformation für die Transformationskurven aus der vorherigen Aufgabe.