Arbeitsblatt II zur Kapitel 1, Mathematische Wirtschaftstheorie

Bitte bearbeiten Sie das erste Kapitel des Skripts im Selbststudium und lösen Sie dazu das folgende Arbeitsblatt. Bei Fragen können Sie sich an Radomir Pestow (radomir.pestow@wirtschaft.tu-chemnitz.de) wenden. Die Lösungen werden in der nächsten Übung besprochen.

1 Nachfrage

Die neoklassische Grundannahme besagt, dass jedes Individuum die ihm zur Verfügung stehenden Handlungsalternativen X seinen Präferenzen (repräsentiert durch eine Nutzenfunktion U) gemäß abwägt und stets die Alternative $x \in X$ wählt, welcher er den höchsten Wert zumisst, d.h. $U(x) \geq U(y)$ für alle $y \in X$. Formal entspricht dieser Entscheidungsprozess einem Optimierungsproblem:

$$\max_{x \in X} U(x)$$

Die Handlungsalternativen können hierbei selbst von exogenen, d.h. vom Individuum als gegeben angesehenen, Parametern p abhängen: $X = X(p)$.

Dem entsprechend würde auch die optimale Entscheidung x von denselben Parametern abhängen: $x = x(p)$.

Wir betrachten im Folgenden einige einfache Beispiele, in denen das Individuum als Konsument von Gütern $x_1, x_2 \dots$ auftritt, welche er zu gegebenen Preisen $p_1, p_2 \dots$ auf einem Markt erwerben kann. Berechnen Sie seine (Preis- und Einkommensabhängige) Nachfrage mittels Lagrange-Verfahren:

a) $\max_{x_1,x_2} U(x_1,x_2) := \alpha \log(x_1) + \beta \log(x_2)$
so dass $x_1 p_1 + x_2 p_2 = I$
wobei $I > 0$ das verfügbare Einkommen des Konsumenten ist, und $\alpha, \beta > 0$.

b) $U(x_1,x_2) := x_1 + (bx_2 - ax_2^2)$
s.d. $x_1 p_1 + x_2 p_2 = I$
wobei die Preise p_1, p_2 sowie die Parameter b, a positiv sind.

c) $\max_{x_1,x_2} U(x_1,x_2) := {x_1}^{\alpha} {x_2}^{\beta}$
s.d. $x_1 p_1 + x_2 p_2 = I$
wobei die Preise p_1, p_2 sowie die Parameter α, β positiv sind.

2 Angebot

Ein Unternehmen repräsentiert ein oder mehrere Individuen, die versuchen einen Produktionsplan x aus ihren Produktionsmöglichkeiten T zu realisieren, der ihren Gewinn $\pi = \pi(x)$ maximiert. Der Produktionsplan umfasst sowohl die einzukaufenden Produktionsfaktoren, als auch die abzusetzenden Güter (erstreckt sich die Produktion über mehrere Perioden, müssen Erlöse und Kosten in der Gewinnfunktion entsprechend abgezinst werden). Formal:

$$\max_{x \in T} \pi(x)$$

Auch hier wird die Entscheidung in der Regel von exogenen Parametern mitabhängen, darunter Faktor- und Produktpreise.

Berechnen Sie das (preisabhängige) Angebot für folgende Unternehmen, als auch den (preisabhängigen) Gewinn, der sich dabei einstellt:

a) $\max_x \pi(x_1,x_2) = xp - ax^2$

b) $\max_{x_1,x_2} \pi(x_1,x_2) = x_1 p_1 + x_2 p_2$
s.d. $\alpha x_1 + \beta x_2^2 = r$

3 Märkte

Die Märkte beinhalten alle auf freiwilligem Tausch beruhenden Transaktionen zwischen Individuen J (i.d.R. mittels Geld).

In einem allgemeinen Gleichgewichtsmodell wird von konkreten Austausch- und Preisbildungsmechanismen abstrahiert. Die Preise p_i (einer Handelsperiode) für die Güter $i \in \{1,\ldots,n\}$ müssen lediglich die Marktgleichgewichtsbedingung erfüllen, d.h. die Güterangebote $x_j^S = (x_{j1}^S, x_{j2}^S, \ldots, x_{jn}^S)$ der Individuen $j \in J$ sollen der Güternachfrage $x_j^D = (x_{j1}^D, x_{j2}^D, \ldots, x_{jn}^D)$ aufaggregiert gleich sein. In Formeln:

$$\sum_j x_j^S(p_1,\ldots,p_n) = \sum_j x_j^D(p_1,\ldots,p_n)$$

Zudem müssen die Gewinne der Unternehmen in die Einkommen der Konsumenten fließen. Wir betrachten das an folgendem Beispiel (siehe insb. dritte Gleichung):

$$\begin{aligned} x_1^D(p_1,p_2) &= x_1^S(p_1,p_2) \\ x_2^D(p_1,p_2) &= x_2^S(p_1,p_2) \\ I &= \pi(p_1,p_2) \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das obige Gleichungssystem mit den Nachfrage-Funktionen, x_1^D, x_2^D, aus 1 a) und den Angebots- und Gewinnfunktionen, x_1^S, x_2^S, π, aus 2 b).
(Die Gleichungen sind für die Unbekannten p_1, p_2 und I zu lösen)

b) Geben Sie auch die Handelsmengen und die Gewinne an.