Eigenschaften nichtnegativer Matrizen

Der *Satz von Perron und Frobenius* existiert in zwei Varianten, einer starken für unzerlegbare Matrizen und einer schwachen für zerlegbare Matrizen. Wir beschränken uns auf die starke Fassung.

Satz 1 (Perron-Frobenius)**.** *Gegeben sei eine nichtnegative, unzerlegbare* $(n \times n)$*-Matrix* $\boldsymbol{A}$*. Dann gilt:*

(a) $\boldsymbol{A}$ *besitzt einen Eigenwert* $\phi_m > 0$.

(b) Zu ϕ_m *existiert ein Eigenvektor* $\boldsymbol{\vartheta} > \boldsymbol{o}$.

(c) Wenn $\boldsymbol{\zeta}$ *ein zu* ϕ_m *gehöriger Eigenvektor ist, dann gilt:* $\boldsymbol{\zeta} = \alpha\, \boldsymbol{\vartheta}, \alpha > 0$.

(d) Aus $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mu \boldsymbol{x}, \mu \geq 0$ *und* $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o}$*, folgt* $\mu = \phi_m$.

(e) Für einen beliebigen Eigenwert ϕ *von* $\boldsymbol{A}$ *gilt:* $\phi_m \geq |\phi|$.

(f) Die maximalen Eigenwerte ϕ_m *wachsen mit jedem Element von* $\boldsymbol{A}$*, d.h. wenn* $\boldsymbol{A}_1 \geq \boldsymbol{A}_2 \geqq \boldsymbol{0}$*, dann* $\phi_{m_1} > \phi_{m_2}$.

(g) Die algebraische Vielfachheit von ϕ_m *ist Eins.*

Beweis. Vgl. Takayama 1985, S. 388 f. ■

Außerdem liegt ϕ_m zwischen dem Zeilensummenmaximum und dem Zeilensummenminimum von $\boldsymbol{A}$. Dasselbe kann man analog für die Spaltensummen zeigen.

Satz 2. *Sei* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *eine nichtnegative* $(n \times n)$*-Matrix und* ϕ_m *ihr maximaler Eigenwert. Dann gilt:*

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \phi_m \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.$$

Beweis. Vgl. Takayama 1985, S. 388 f. ■

Es folgt abschließend eine Zusammenfassung über die Eigenschaften nichtnegativer, quadratischer Matrizen, die insbesondere für die Analyse linearer Produktionsmodelle wichtig sind.

Satz 3 (Nichtnegative Matrizen)**.** *Für eine nichtnegative Matrix* $\boldsymbol{A}$ *und eine Matrix* $\boldsymbol{B} := (\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}), \alpha \in \mathbb{R}$, *sind die folgenden Aussagen jeweils paarweise äquivalent:*

(a) Es existiert ein $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o}$*, so dass* $\boldsymbol{Bx} > \boldsymbol{o}$.

(b) Für jedes $\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{o}$ *existiert ein* $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o}$*, so dass* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Bx}$.

(c) $\boldsymbol{B}$ *ist invertierbar und* $\boldsymbol{B}^{-1} \geq \mathbf{0}$.

(d) (Hawkins-Simon-Bedingung) Alle sukzessiven Hauptminoren von $\boldsymbol{B}$ *sind positiv.*

(e) Alle reellen Komponenten aller Eigenwerte von $\boldsymbol{B}$ *sind positiv.*

(f) $\alpha > \phi_m$*, wobei* ϕ_m *der maximale Eigenwert von* $\boldsymbol{A}$ *ist.*

Ist $\boldsymbol{A}$ *zudem unzerlegbar, so ist jede der obigen Aussagen paarweise äquivalent zu den beiden folgenden Bedingungen:*

(g) Es existiert ein $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o}$*, so dass* $\boldsymbol{Bx} \geq \boldsymbol{o}$.

(h) $\boldsymbol{B}$ *ist invertierbar und* $\boldsymbol{B}^{-1} > \mathbf{0}$.

Beweis. Vgl. Takayama 1985, S. 392 ■