„Leontief in der Sraffa-Wirtschaft“

Nils Fröhlich

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Professur VWL II

Gliederung

Das Sraffa-Beispiel

Tabelle 1: Das Sraffa-Beispiel

	Eisen	Kohle	Weizen	Netto	$\sum$
Eisen	90	50	40	0	180
Kohle	120	125	40	165	450
Weizen	60	150	200	70	480
Arbeit	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{8}{16}$	–	–

- Sraffa (1960): 19
- Spalten $\rightarrow$ bezogene Vorleistungen (Inputs)
- Zeilen $\rightarrow$ gelieferte Vorleistungen

Das offene Leontief-Modell

Notation

- Skalare „normal“
  - Inputkoeffizienten $a_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_k} \frac{[ME_i]}{[ME_k]}$
- Matrizen „fett und groß“
  - Inputkoeffizentenmatrix $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$
  - Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$
- Vektoren „fett und klein“
  - Bruttoprodukt $\boldsymbol{x}$
  - Nettoprodukt $\boldsymbol{y}$

Das offene Leontief-Modell

Das offene Leontief-Modell

$$\overbrace{\boldsymbol{x}}^{\textit{Bruttoprodukt}} = \overbrace{\boldsymbol{Ax}}^{\textit{Inputs}} + \overbrace{\boldsymbol{y}}^{\textit{Nettoprodukt}} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \underbrace{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}}_{\text{„Leontief-Inverse“}} \boldsymbol{y} \tag{2}$$

- Sraffa-Beispiel
- Zahlenbeispiel offenes Leontief-Modell

Das offene Leontief-Modell

Tabelle 2: Nochmals das Sraffa-Beispiel

	Eisen	Kohle	Weizen	Netto	$\sum$
Eisen	90	50	40	0	180
Kohle	120	125	40	165	450
Weizen	60	150	200	70	480
Arbeit	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{8}{16}$	–	–

$$\begin{pmatrix} 90 & 50 & 40 \\ 120 & 125 & 40 \\ 60 & 150 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 165 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 450 \\ 480 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Das offene Leontief-Modell

Inputkoeffizienten ausrechnen

$$\begin{pmatrix} 90 & 50 & 40 \\ 120 & 125 & 40 \\ 60 & 150 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{180} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{450} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{480} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{18} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Das System mit Inputkoeffizienten formulieren

$$\begin{pmatrix} 180 \\ 450 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{18} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 \\ 450 \\ 480 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 165 \\ 70 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Das offene Leontief-Modell

Ergebnis: Das Sraffa-Beispiel als offenes Leontief-Modell

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{y} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} 180 \\ 450 \\ 480 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.52 & 0.83 & 0.62 \\ 3.72 & 2.36 & 0.87 \\ 4.14 & 1.82 & 2.57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 165 \\ 70 \end{pmatrix} \tag{7}$$

- Komponenten von $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ auf zwei Nachkommastellen gerundet
- Rundungsbedingte Ungenauigkeiten in (7)

Produktivität

Ist $\boldsymbol{A}$ produktiv?

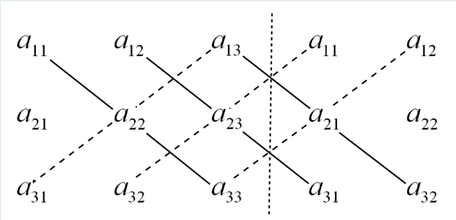
- Maximaler Eigenwert von $\boldsymbol{A}$: $\phi_m < 1$
- ϕ_m ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms von $\boldsymbol{A}$
- Determinante einer (3×3)-Matrix: Regel von Sarrus

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{18} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\det(\boldsymbol{A} - \phi \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2} - \phi\right) & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & \left(\frac{5}{18} - \phi\right) & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \left(\frac{5}{12} - \phi\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Produktivität

Regel von Sarrus



$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} \left(\frac{1}{2}-\phi\right) & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \left(\frac{1}{2}-\phi\right) & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & \left(\frac{5}{18}-\phi\right) & \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & \left(\frac{5}{18}-\phi\right) \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \left(\frac{5}{12}-\phi\right) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \tag{11}$$

Produktivität

Charakteristisches Polynom $\xi(\phi)$

$$\begin{aligned}\xi(\phi) &= \det(\boldsymbol{A} - \phi \boldsymbol{I}) \\ &= \left(\frac{1}{2}-\phi\right)\left(\frac{5}{18}-\phi\right)\left(\frac{5}{12}-\phi\right) \\ &\quad + \frac{1}{9}\frac{1}{12}\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\frac{2}{3}\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\left(\frac{5}{18}-\phi\right)\frac{1}{3} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}-\phi\right)\frac{1}{12}\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\frac{2}{3}\left(\frac{5}{12}-\phi\right) \\ &= \phi^3 - \frac{43}{36}\phi^2 + \frac{1}{3}\phi - \frac{35}{1296}\end{aligned} \tag{12}$$

- Polynom dritten Grades
- Eigenwerte $\rightarrow$ Nullstellen von $\xi(\phi)$

Produktivität

Charakteristisches Polynom $\xi(\phi)$

$$\xi(\phi) = \phi^3 - \frac{43}{36}\phi^2 + \frac{1}{3}\phi - \frac{35}{1296} = 0 \tag{13}$$

- Drei Nullstellen: $\left\{\frac{1}{6}, \frac{7}{36}, \frac{5}{6}\right\}$
- $\phi_m = \frac{5}{6} < 1$, d.h. $\boldsymbol{A}$ ist produktiv

Eigenvektoren für $\phi_m = \frac{5}{6}$

- $\phi_m = \frac{5}{6}$ in Gleichung (9) einsetzen
- Linear-homogenes Gleichungssystem

Produktivität

Angepasste Gleichung (9):

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} & 0 \end{array}\right) \tag{15}$$

Produktivität

Gaußsches Eliminationsverfahren

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{16}$$

- Wie erwartet: Unendlich viele Lösungen
- Wir setzen $x_3 := \alpha$ mit $\alpha > 0$

Eigenvektoren

$$\boldsymbol{x}_{\phi_m} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha > 0 \tag{17}$$

Die maximale Wachstumsrate

Zusammenhang zwischen ϕ_m und g_m

$$g_m = \frac{1}{\phi_m} - 1 = \frac{1}{\frac{5}{6}} - 1 = \frac{6}{5} - 1 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2 \tag{18}$$

- Maximales Wachstum der Modellwirtschaft: 20%
- Technische Wachstumsobergrenze
- ϕ_m ist ein kompakter „Technikindikator“
- Realisierte Wachstumsrate g_r kann kleiner sein

Arbeitswerte

Arbeitswerte

- Direkte plus indirekte Arbeitszeit
- D.h. vertikal integrierte Arbeitszeit
- Direkte Arbeitszeit: $(1 \times n)$-Vektor $\boldsymbol{\ell}$
- Hier: $\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{8}{16} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.19 & 0.31 & 0.50 \end{pmatrix}$
- Arbeitswerte: $(1 \times n)$-Vektor $\boldsymbol{\lambda}$
- Indirekte Arbeitszeit: $\boldsymbol{\lambda A}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{\lambda A} + \boldsymbol{\ell} \\ &= \boldsymbol{\ell}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots \boldsymbol{A}^n + \cdots\right) \\ &= \boldsymbol{\ell}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{19}$$

Arbeitswerte

Berechnung von $\boldsymbol{\lambda}$ (Mannjahre pro Maßeinheit)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{\ell}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0.19 & 0.31 & 0.50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.52 & 0.83 & 0.62 \\ 3.72 & 2.36 & 0.87 \\ 4.14 & 1.82 & 2.57 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 3.89 & 1.8 & 1.67 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

Literatur

- Brünner, Arndt: *Online Mathe-Tools.*
  http://www.arndt-bruenner.de
- Leydold, Josef: *Mathematik für Ökonomen.*
  München 2000.
- Pasinetti, Luigi L.: *Vorlesungen zur Theorie der Produktion.*
  Marburg 1988.
- Sraffa, Pierro: *Production of Commodities by Means of Commodities: Prelude to a Critique of Economic Theory.*
  Cambridge 1960.
- Takayama, Akira: *Mathematical economics.*
  2. Auflage, Cambridge 1985.