Physikalische Dimensionen in linearen Produktionsmodellen

Nils Fröhlich*

19. Januar 2010

Wir betrachten eine n-sektorale Wirtschaft mit Einzelproduktion, in der ausschließlich Basiswaren vorkommen. Die physikalische Dimension der i-ten Ware wird mit $[M_i]$ bezeichnet ($i = 1, 2, \ldots, n$), reine Zahlen haben die Dimension [1]. Der Spaltenvektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$ erfasst das Bruttoprodukt und der Spaltenvektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+$ das Nettoprodukt dieser Modellwirtschaft. Die Elemente dieser beiden Vektoren sind Stromgrößen, beziehen sich also auf eine willkürliche buchhalterische Periode t mit der Dimension $[T]$. Die Einheit der i-ten Komponente des Brutto- bzw. Nettoprodukts lautet darum $[{}^{M_i}/_{T}]$. Die Matrix $\boldsymbol{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}_+$ verzeichnet die sektoralen Lieferverflechtungen; $x_{ij}\ [{}^{M_i}/_{T}]$ zeigt an, wieviel des Erzeugnisses i in der betreffenden Periode an den Sektor j geliefert wird. Üblicherweise normiert man allerdings die Lieferverflechtungen. Hierzu wird meistens die sogenannte Inputkoeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}_+$ verwendet, wobei a_{ij} die Menge der i-ten Ware angibt, die zur Produktion einer Einheit der Ware j benötigt wird.

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \left[\frac{M_i}{M_j} \right]. \tag{1}$$

$\boldsymbol{A}$ ist unzerlegbar, weil annahmegemäß nur Basiswaren existieren. Das Mengensystem lautet:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}. \tag{2}$$

*Chemnitz University of Technology, Department of Economics, Thüringer Weg 7, 09107 Chemnitz, Germany. E-Mail: `nils.froehlich@wirtschaft.tu-chemnitz.de`.

Ermittelt man die i-te Komponente von (2), erkennt man schnell, dass das Mengensystem dimensional homogen ist:

$$x_i \left[\frac{M_i}{M_t}\right] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left[\frac{M_i}{M_j}\right] x_j \left[\frac{M_j}{M_t}\right] + y_i \left[\frac{M_i}{M_t}\right]. \tag{3}$$

Da (3) in den Dimensionen übereinstimmt, sollte man meinen, auf das Mengensystem (2) die üblichen mathematischen Operationen anwenden zu können, ohne in den resultierenden Ausdrücken Dimensionsfehler zu verursachen. Allerdings bedürfen dimensionsbehaftete Matrizen größerer Aufmerksamkeit als einzelne physikalische Größen. Letztere können z. B.immer mit einem reinen, ganzzahligen Skalar potenziert werden, für Matrizen gilt dies a priori nicht. Man kann sich diesen Zusammenhang mit Hilfe der zu Demonstrationszwecken willkürlich gewählten Matrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11}\,[B_1] & b_{12}\,[B_1] \\ b_{21}\,[B_2] & b_{22}\,[B_2] \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit den Dimensionen $[B_1]$ und $[B_2]$ leicht verdeutlichen: Ihr Quadrat $\bar{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}$ ist nicht definiert, denn andernfalls würde man „Äpfel und Birnen" addieren:

$$\bar{b}_{11} = (b_{11}\,[B_1])^2 + b_{12}\,[B_1]\, b_{22}\,[B_2]\,. \tag{5}$$

Wie wir gleich sehen werden, ist die Frage, ob die Potenz einer Matrix existiert, auch für das obige Mengensystem von Bedeutung. Umformen von (2) liefert

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\, \boldsymbol{y}. \tag{6}$$

Die Maßeinheiten von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ wurden oben bereits erläutert. Wie aber steht es um diejenigen der Leontief-Inversen $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$?[1] Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass eine inverse $(n \times n)$-Matrix $(\mu \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$, $\mu \in \mathbb{R}$, durch die Potenzreihe

$$(\mu \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{\mu}\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{A} + \left(\frac{1}{\mu}\boldsymbol{A}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu}\boldsymbol{A}\right)^3 + \cdots\right) \tag{7}$$

iterativ berechnet werden kann (vgl. Pasinetti 1977: 66, 265f.).[2] Für die Leontief-Inverse ergibt sich also:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots \tag{8}$$

[1] Die Leontief-Inverse existiert, weil die „Technikmatrix" $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ plausiblerweise den vollen Rang $\mathrm{rg}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = n$ hat, d.h. alle Spalten bilden linear unabhängige Inputerfordernisse ab.

[2] Die Iteration gilt unter der Voraussetzung, dass $\mu > |\phi_m|$, wobei ϕ_m der maximale Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ ist. In unserem Fall ist $\mu = 1$. Weil $\boldsymbol{y}$ zugleich mindestens semipositiv sein muss, d.h. $0 < \phi_m < 1$, kann Gleichung (7) auf $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ angewendet werden.

Die Frage ist, ob (8) in den Dimensionen konsistent ist. Um dies zu überprüfen, bestimmen wir $\boldsymbol{A}^2$ exemplarisch im Zwei-Güterfall:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2 &= \begin{pmatrix} a_{11}\,[1] & a_{12}\left[\frac{M_1}{M_2}\right] \\ a_{21}\left[\frac{M_2}{M_1}\right] & a_{22}\,[1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\,[1] & a_{12}\left[\frac{M_1}{M_2}\right] \\ a_{21}\left[\frac{M_2}{M_1}\right] & a_{22}\,[1] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}^2\,[1] + a_{12}a_{21}\,[1] & a_{11}a_{12}\left[\frac{M_1}{M_2}\right] + a_{12}a_{22}\left[\frac{M_1}{M_2}\right] \\ a_{21}a_{11}\left[\frac{M_2}{M_1}\right] + a_{22}a_{21}\left[\frac{M_2}{M_1}\right] & a_{21}a_{12}\,[1] + a_{22}^2\,[1] \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{9}$$

Wie man sieht, weisen die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}^2$ jeweils dieselben Maßeinheiten auf wie diejenigen der Matrix $\boldsymbol{A}$, nämlich $[M_i/M_j]$. Dasselbe kann man entsprechend auch für höhere Potenzen von $\boldsymbol{A}$ bzw. für andere Sektorenzahlen n zeigen. Die obige Potenzreihe (8) ist darum dimensional homogen. Oder anders formuliert: Die Komponenten der Leontief-Inversen $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ und die Komponenten der Inputkoffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ stimmen in den Dimensionen überein.[3]

$\boldsymbol{\lambda}$

Literatur

Okishio, N. (1982). Dimensional Analysis in Economics. In: *Kobe University economic review* 28: 31–44.

Pasinetti, L. L. (1977). *Lectures on the theory of production.* London: Macmillan.

[3]Ein identisches Ergebnis kann man mit Hilfe der Cramerschen Regel herleiten (vgl. Okishio 1982: 36f.). Dann ist auch der Fall $\phi_m = 1$ abgedeckt.