Quelle: das wirtschaftsstudium (wisu) 37. Jg. (2008), S. 398-400

Die Klausur aus der Volkswirtschaftslehre

Die Aufgabe wurde von Prof. Dr. Fritz Helmedag (TU Chemnitz) als Teil der schriftlichen Prüfung zur Vorlesung „Produktions- und Werttheorie" im Wintersemester 2006/07 gestellt. Bearbeitungszeit: 30 Minuten. Als Hilfsmittel war ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

Thema: Lineare Produktionsmodelle

Gegeben ist ein lineares Produktionsmodell der Form $\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{y}$. Die Spaltenvektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ bezeichnen das Brutto- und Nettoprodukt. $\mathbf{A}$ ist die (2x2)-Inputkoeffizientenmatrix mit diesen Werten:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix}.$$

1. Berechnen Sie den maximalen Eigenwert λ_m von $\mathbf{A}$. Ist $\mathbf{A}$ produktiv? Bestimmen Sie weiterhin die maximale Wachstumsrate g_m des Systems. Kann es unbeschränkt wachsen?

2. Nun soll $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{0}}$ sein, wobei $\bar{\mathbf{0}}$ den Nullvektor darstellt. Zeigen Sie mithilfe der Inputkoeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

allgemein, dass das gesamte Bruttoprodukt dieser Ökonomie als Vorleistungen gebraucht wird. Gibt es eine Obergrenze für a_{11} und a_{22}?

I. Daran hätten Sie denken müssen

Zu Aufgabe 1:

Eine nicht negative Inputkoeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist genau dann **produktiv**, wenn von jeder Ware ein positives Nettoprodukt hergestellt werden kann, d.h. wenn es einen Bruttovektor $\mathbf{x}$ gibt, für den gilt:

(1.1) $\mathbf{Ax} < \mathbf{x}.$

Ein beliebiger Eigenwert λ von $\mathbf{A}$ ist ein Skalar mit dieser Eigenschaft:

(1.2) $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$

also

(1.3) $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \bar{\mathbf{0}}.$

Damit (1.3) eine Lösung hat, darf die Inverse $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1}$ nicht existieren, d.h.

(1.4) $$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0{,}1-\lambda & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Die Gleichung (1.4) beschreibt das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$, seine Nullstellen liefern alle existierenden Eigenwerte λ. In diesem Fall sind das zwei Werte; der größere von beiden ist der gesuchte λ_m (falls es eine doppelte Nullstelle geben sollte, sind beide Eigenwerte maximal). Dies liefert ein Kriterium, mit dessen Hilfe man überprüfen kann, ob $\mathbf{A}$ produktiv ist. Denn wenn $\lambda_m < 1$ gilt, ist (1.1) immer erfüllt.

Weiterhin ist dadurch die Existenz eines nicht negativen Bruttovektors $\mathbf{x}$ sichergestellt. Das Gleichungssystem weist garantiert keine negativen Mengen auf.

Um die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu berechnen, ist daran zu erinnern, dass für die Berechnung der Determinante einer (2x2)-Matrix gilt:

(1.5) $$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}.$$

Das charakteristische Polynom (1.4) ist in dem Beispiel also eine quadratische Gleichung. Ihre Nullstellen müssen ermittelt werden:

(1.6) $$\lambda^2 - \frac{1}{5}\lambda - \frac{3}{20} = 0.$$

Die Lösung lautet {–0,3; 0,5}, d.h. $\lambda_m = 0{,}5 < 1$. Die Inputkoeffizientenmatrix ist somit produktiv und das dazugehörige ökonomische System kann in beiden Sektoren einen positiven Netto-Output erzeugen.

Die Antwort hätte sich allerdings schneller und eleganter finden lassen. Denn aus der linearen Algebra ist bekannt, dass λ_m stets zwischen dem Minimum und dem Maximum der Spalten- bzw. Zeilensummen von **A** liegt. In der Aufgabe fallen die entsprechenden Minima und Maxima zusammen und ergeben beidesmal 0,5 — dies muss also die gesuchte Lösung für λ_m sein. Mit etwas Hintergrundwissen kann man sich also die Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms ersparen. Bei diesem Lösungsweg gab es Zusatzpunkte für eine besonders gelungene Argumentation.

Die Frage nach der **maximalen Wachstumsrate** g_m führt wieder zu einem Eigenwertproblem. Denn ein wachsendes ökonomisches System bedeutet:

(1.7) $$(1 + g_m)\mathbf{Ax} = \mathbf{x},$$

was sich umformen lässt zu

(1.8) $$\mathbf{Ax} = \frac{1}{1+g_m}\mathbf{x} = \lambda_m \mathbf{x} \text{ mit } \lambda_m = \frac{1}{1+g_m}.$$

Auflösen nach der maximalen Wachstumsrate liefert

(1.9) $$g_m = \frac{1}{\lambda_m} - 1.$$

Die Ökonomie wächst, falls $0 < \lambda_m < 1$. Je näher λ_m bei null liegt, desto höher kann das Wachstum ausfallen. Bei $\lambda_m = 1$ liegt ein stationäres ökonomisches System vor, denn der Input-Vektor entspricht dem Output-Vektor. **A** ist — wie zuvor gezeigt — in diesem Fall nicht produktiv, was nur eine andere Formulierung für denselben Sachverhalt ist.

Man erhält:

(1.10) $$g_m = \frac{1}{\lambda_m} - 1 = \frac{1}{0{,}5} - 1 = 1.$$

Die Produktionstechnik erlaubt also ein maximales Wachstum von 100 Prozent.

Zu Aufgabe 2:

Da es kein Nettoprodukt gibt, ist das ökonomische System durch dieses Gleichungssystem beschrieben:

(2.1) $$\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$$

oder

(2.2) $$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \bar{\mathbf{0}}.$$

Ähnlich wie bei (1.3) liegt auch hier nur dann eine Lösung vor, wenn die Inverse $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ nicht existiert, d.h.

(2.3) $$\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Mithilfe von (1.5) wird daraus:

(2.4) $$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0,$$

woraus man erkennen kann, dass

(2.5) $1 - a_{11} = a_{12}$ und $1 - a_{22} = a_{21}$, q.e.d.

Also fließt der gesamte Output als Input in den Produktionsprozess zurück. Was nicht als Eigenverbrauch in die Produktion eingeht, wird an den jeweils anderen Sektor als Vorleistung geliefert.

Intuitiv ist klar, dass kein Sektor einen höheren Eigenverbrauch seines Produktes haben kann, als er selbst davon produzieren kann. Demnach ist die Obergrenze für die Input-Koeffizienten a_{11} und a_{22} das Bruttoprodukt des betreffenden Sektors. Benötigt wird nun ein formaler Nachweis dieses Sachverhalts, der aber leicht zu erbringen ist. Denn aus (2.5) folgt:

(2.6) $1 - a_{11} = a_{12} \geq 0 \Leftrightarrow a_{11} \leq 1$

bzw.

(2.7) $1 - a_{22} = a_{21} \geq 0 \Leftrightarrow a_{22} \leq 1$.

Die Obergrenze der beiden Input-Koeffizienten beträgt eins, genauso, wie es oben vermutet wurde.

II. Mögliche Fehlerquellen

— Allgemein: Bei den Erläuterungen sollen nicht lediglich die Formeln zusammengefasst werden. Die Ergebnisse sind vielmehr möglichst „griffig" auf den Punkt zu bringen.
— Man sollte sich klarmachen, dass alle untersuchten Zusammenhänge rein technischer Natur sind, sich also auf das durch den Stand der Technik vorgegebene Produktionspotenzial beziehen. Ob z.B. die maximale Wachstumsrate von der Endnachfrage ausgeschöpft wird, kann mithilfe des linearen Produktionsmodells nicht entschieden werden. Es wird lediglich gesagt, dass die gegebene Produktionstechnik ein maximales Wachstum von 100 Prozent zulässt — nicht jedoch, dass es sich tatsächlich einstellt.
— Die Bedeutung von λ_m für die Produktivität einer Inputkoeffizientenmatrix ist nicht bekannt.
— Es wird übersehen, dass die maximale Wachstumsrate im zweiten Teil von Aufgabe (1) ebenfalls ein Eigenwertproblem darstellt.
— Bei Aufgabe (2) muss das grundlegende Gleichungssystem — anders als bei (1) — ohne Nettoprodukt aufgestellt werden, da die Zusammenhänge sonst nicht hergeleitet werden können.

Literaturempfehlungen:

Kurz, H.D./Salvadori, N.: Theory of Production. Cambridge 1997.
Pasinetti, L.L.: Vorlesungen zur Theorie der Produktion. Marburg 1988.
Takayama, A.: Mathematical Economics. 2. Aufl., Cambridge 1985.