Das Rubinsteinspiel

Quelle: Rubinstein, Ariel, Perfect Equilibrium in a Bargaining Model, in: *Econometrica*, vol. 50 (1982), S. 97-109.

Betrachtet sei ein „Teilungsspiel“: A und B müssen sich über die Aufteilung eines Euro einigen. Sie unterbreiten abwechselnde Offerten, bis der Partner annimmt. Rubinstein baut Friktionen in Form von Verhandlungskosten ein, der „Kuchen“ schrumpft sozusagen in der Zeit bis zur Verteilung. Ein Maß für die Ungeduld eines Akteurs ist der „Diskontfaktor“ δ , der die subjektive Zeitpräferenzrate angibt. Wenn einer Person heute 100 Sack Weizen so lieb sind wie 200 Sack nächstes Jahr, so gewichtet sie den kommenden Konsum mit dem Faktor δ geringer:

$$100 = \delta 200$$

Im vorliegenden Fall ist $\delta = 0,5$.

Die Verteilungsvorschläge von A oder B seien mit a bzw. b bezeichnet. B akzeptiert, wenn A ihm den diskontierten Wert seiner eigenen Verteilungsvorstellung lässt:

$$1 - a = \delta_B b \quad (1)$$

A stimmt zu, falls er den Gegenwartswert seines Vorschlags bekommt:

$$1 - b = \delta_A a \quad (2)$$

Aus (1): $a = 1 - \delta_B b \quad (1')$

(1') in (2):

$$1 - b = \delta_A(1 - \delta_B b)$$

$$-b + \delta_A \delta_B b = -1 + \delta_A$$

$$b = \frac{1 - \delta_A}{1 - \delta_A \delta_B} \quad (3)$$

(3) in (1'):

$$\begin{aligned} a &= 1 - \delta_B \left(\frac{1 - \delta_A}{1 - \delta_A \delta_B} \right) = \frac{1 - \delta_A \delta_B - \delta_B + \delta_A \delta_B}{1 - \delta_A \delta_B} = \\ &= \frac{1 - \delta_B}{1 - \delta_A \delta_B} \end{aligned} \quad (4)$$

Beide Vorschläge können jedoch nicht gleichzeitig erfüllt werden, da die Ansprüche höher als die Verteilungsmasse sind:

$$a + b = \frac{1 - \delta_B + 1 - \delta_A}{1 - \delta_A \delta_B} > 1 \text{ für } 0 < \delta_A, \delta_B < 1$$

Beweis durch Ausrechnen:

$$1 - \delta_B + 1 - \delta_A > 1 - \delta_A \delta_B$$

$$1 - \delta_B - \delta_A + \delta_A \delta_B > 0$$

$$1 - \delta_A - \delta_B(1 - \delta_A) > 0$$

$$(1 - \delta_A)(1 - \delta_B) > 0$$

Vor diesem Hintergrund wird der Anzugsvorteil („first-mover advantage“) wichtig. Wenn A beginnt, lautet die von ihm präsentierte Aufteilung:

$$A \text{ beansprucht: } a = \frac{1 - \delta_B}{1 - \delta_A \delta_B}$$

$$\text{Für } B \text{ bleibt: } 1 - a = \frac{1 - \delta_A \delta_B - 1 + \delta_B}{1 - \delta_A \delta_B} = \frac{\delta_B (1 - \delta_A)}{1 - \delta_A \delta_B}$$

Warum nimmt B das Angebot an? Weil er in der nächsten Runde nicht mehr einstreichen kann. Der heutige Wert seiner Forderung ist nämlich:

$$\delta_B b \stackrel{(3)}{=} \delta_B \frac{1 - \delta_A}{1 - \delta_A \delta_B} \stackrel{(1)}{=} 1 - a$$

Durch die Diskontfaktoren können unterschiedliche Verhandlungsstärken berücksichtigt werden. Je kleiner δ_i desto schwächer ist i .

Beispiele:

Für $\delta_A = \delta_B = 0,9$ verbucht A 52,6 %.

Für $\delta_A = 0,9$ und $\delta_B = 0,8$ beläuft sich der Anteil A auf 71,4 %.

Bei gleicher Gegenwartspräferenz $\delta_A = \delta_B = \delta$ folgt:

Anteil A :
$$a^* = \frac{1-\delta}{1-\delta^2} = \frac{1}{1+\delta}$$

Merke:
$$(1+\delta)(1-\delta) = 1-\delta^2$$

B bekommt:
$$b^* = 1 - a^* = \frac{1+\delta-1}{1+\delta} = \frac{\delta}{1+\delta}$$

Für $\delta < 1$ gilt stets $b^* < a^*$, trotz gleicher Stärke. Schrumpft die Zeit zwischen den Offerten, geht δ gegen 1. Im Limit gilt:

$$a^*(\delta = 1) = b^*(\delta = 1) = \frac{1}{2}$$

Die Spieler machen also „fifty-fifty“.

Dieses Ergebnis wird durch eine Überlegung von Nash gestützt (The bargaining problem, in: *Econometrica*, Vol. 28 (1950), S. 155-162). Er optimiert:

$$N = \overbrace{(\pi_A(\text{Ja}) - \pi_A(\text{Nein}))}^{\text{Vorteil } A} \cdot \overbrace{(\pi_B(\text{Ja}) - \pi_B(\text{Nein}))}^{\text{Vorteil } B}$$

Auszahlung
bei Einigung
Auszahlung bei
Nichteinigung
(fall back position)

Randlösungen sind somit ausgeschlossen. Zu den Eigenschaften des Nash-Produkts siehe Rasmusen, Games and Information, 3. Aufl., Blackwell 2001, S. 297 f.:

- Unabhängig von den Einheiten von π
- Pareto-optimal
- Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, das Weglassen einer inferioren Lösung, ändert die optimale Aufteilung nicht
- Anonymität: Man kann A und B vertauschen

Die gesuchte Lösung sei x . Das Nash-Produkt im Teilungsspiel lautet somit:

$$N(x) = (x - 0)(1 - x - 0) = x - x^2$$

$$N' = \frac{dN(x)}{dx} = 1 - 2x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x^* = \frac{1}{2}$$

$$N'' < 0$$

x^* liefert demnach ein Maximum für $N(x)$. Fifty-fifty ist auch aus dieser Sicht „fair“.