Lineare Produktionsmodelle 1

Nils Fröhlich

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Professur VWL II – Mikroökonomie

Gliederung

Input-Output-Tabellen
Aufbau

- Input-Output-Tabellen (IOT) (Verflechtungstabellen)
- Sektorales Aufkommen und sektorale Verwendung der Bruttowertschöpfung
- Typische Sektorengliederung
  - Primärer Sektor: Land- und Forstwirtschaft, Fischerei
  - Sekundärer Sektor: Produzierendes Gewerbe
  - Tertiärer Sektor: Private und öffentliche Dienstleistungen
- Drei Tabellentypen
  - Monetäre Input-Output-Tabelle (MIOT)
  - Physische Input-Output-Tabelle (PIOT)
  - Zeitliche Input-Output-Tabelle (ZIOT)

Input-Output-Tabellen
Aufbau

MIOT 2000 (Herstellungspreise) in Mrd. €

	Verwendung				
Aufk.	Primär	Sekund.	Tertiär	Endverbr.	G. Verbr.
Primär	4, 8	35, 4	3, 3	25, 7	69,1
Sekund.	11, 5	749, 7	148, 3	1.249, 3	2.158,9
Tertiär	10, 0	310, 9	609, 6	1.259, 7	2.190,2
Summe	26,2	1.096,0	761,2	2.534,7	4.418,2

Quelle: Statistisches Bundesamt

Input-Output-Tabellen
Aufbau

- MIOT sind methodischer Standard
- POIT (ZIOT) ebenso wichtig, aber Erstellung sehr aufwendig (akt. Berichtsjahr 1995)
- Theorie: Überprüfung von Arbeitswerttheorie und neoricardianischer Theorie
- „Praxis“: Ökologische Gesamtrechnung, Export-/Importstrukturen etc.
- Heute relevant: PIOT $\rightarrow$ Leontief-Modell

Input-Output-Tabellen
Physische Input-Output-Tabellen

- n Sektoren produzieren n Waren (keine Kuppelproduktion)
- m primäre Inputs (Arbeitskraft, Importe etc.)
- $[ME_i] :=$ Mengeneinheit der Ware i
- $[MI_i] :=$ Mengeneinheit des primären Inputs i

Input-Output-Tabellen
Physische Input-Output-Tabellen

- $x_{ik}[ME_i] :=$ Menge der Ware i zur Produktion der Ware k
- $\boldsymbol{X} = (x_{ik}) :=$ Matrix der Vorleistungsverflechtungen
- $y_i[ME_i] :=$ Nettooutput der Ware i (letzte Verwendung)
- $\boldsymbol{y} :=$ Vektor der letzten Verwendung
- $z_{ik}[MI_i] :=$ Menge des primären Inputs i zur Produktion der Ware k (Arbeitskraft, Importe usw.)
- $\boldsymbol{Z} = (z_{ik}) :=$ Matrix der Primärinputs

Input-Output-Tabellen
Physische Input-Output-Tabellen

Physische Input-Output-Tabelle

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	letzte Verw.
Ware 1	$x_{11}[ME_1]$	$\cdots$	$x_{1n}[ME_1]$	$y_1[ME_1]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}[ME_n]$	$\cdots$	$x_{nn}[ME_n]$	$y_n[ME_n]$
Input 1	$z_{11}[MI_1]$	$\cdots$	$z_{1n}[MI_1]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
Input m	$z_{m1}[MI_m]$	$\cdots$	$z_{mn}[MI_m]$	

Physische Input-Output-Tabelle

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	Konsum
Ware 1	$x_{11}[ME_1]$	$\cdots$	$x_{1n}[ME_1]$	$y_1[ME_1]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}[ME_n]$	$\cdots$	$x_{nn}[ME_n]$	$y_n[ME_n]$

$x_{ik}[ME_i] :=$ Menge der Ware i zur Produktion der Ware k

Input-Output-Tabellen
Physische Input-Output-Tabellen

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

Physische Input-Output-Tabelle

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	Konsum
Ware 1	$x_{11}[ME_1]$	$\cdots$	$x_{1n}[ME_1]$	$y_1[ME_1]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}[ME_n]$	$\cdots$	$x_{nn}[ME_n]$	$y_n[ME_n]$

$x_{ik}[ME_i] :=$ Menge der Ware i zur Produktion der Ware k

Input-Output-Tabellen
Physische Input-Output-Tabellen

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

Physische Input-Output-Tabelle

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	Konsum
Ware 1	$x_{11}[ME_1]$	$\cdots$	$x_{1n}[ME_1]$	$y_1[ME_1]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}[ME_n]$	$\cdots$	$x_{nn}[ME_n]$	$y_n[ME_n]$

$x_{ik}[ME_i] :=$ Menge der Ware i zur Produktion der Ware k

Input-Output-Tabellen
Physische Input-Output-Tabellen

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

Physische Input-Output-Tabelle

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	Konsum
Ware 1	$x_{11}[ME_1]$	$\cdots$	$x_{1n}[ME_1]$	$y_1[ME_1]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}[ME_n]$	$\cdots$	$x_{nn}[ME_n]$	$y_n[ME_n]$

Spaltensummen: „Äpfel und Birnen …“

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = x_{1k}[ME_1] + \cdots + x_{nk}[ME_n] \quad \Rightarrow \text{Unsinn!!!}$$

Input-Output-Tabellen
Physische Input-Output-Tabellen

Physische Input-Output-Tabelle

	Verwendung			
	Produktion von			
Aufkommen	Ware 1	$\cdots$	Ware n	Konsum
Ware 1	$x_{11}[ME_1]$	$\cdots$	$x_{1n}[ME_1]$	$y_1[ME_1]$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Ware n	$x_{n1}[ME_n]$	$\cdots$	$x_{nn}[ME_n]$	$y_n[ME_n]$

Zeilensummen: Sektorale Bruttoproduktion

$$\tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} + y_i = x_{i1}[ME_i] + \cdots + x_{in}[ME_i] + y_i[ME_i]$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Das Leontief-Modell
Struktur

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

- Wassily W. Leontief (1906-1999), Nobelpreis 1973
- „The Structure of American Economy 1919-39“ (1951)
- Empirie $\rightarrow$ Physische Input-Output-Tabelle
- In welcher Menge wird Ware i zur Produktion *einer Einheit* von Ware k *durchschnittlich* benötigt?

$$a_{ik} = \frac{x_{ik}}{\tilde{x}_k} \frac{[ME_i]}{[ME_k]} \quad \text{mit } a_{ik} \geq 0 \tag{1}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Das Leontief-Modell
Struktur

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

- Theorie $\rightarrow$ Lineares Produktionsmodell
- $\boldsymbol{A} = (a_{ik}) \Rightarrow$ *konst.* für beliebige Mengen von k

$$a_{ik} = \frac{x_{ik}}{\tilde{x}_k} \frac{[ME_i]}{[ME_k]}$$

$$\Leftrightarrow x_{ik}[ME_i] = a_{ik} \frac{[ME_i]}{[ME_k]} \tilde{x}_k [ME_k] = a_{ik} \tilde{x}_k [ME_i] \tag{2}$$

Inputkoeffizient a_{ik}

Menge der Ware i, die zur Produktion *einer Einheit* von Ware k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *im* Sektor k benötigt wird

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Das Leontief-Modell
Struktur

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

i-te Zeilensumme (Bruttooutput i)

$$\tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} + y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \tilde{x}_k + y_i \tag{3}$$

Zeilensumme PIOT

Alle Sektoren zusammen

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{n^2 \text{ Inputkoeffizienten}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

In Matrizenschreibweise

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \underbrace{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}}_{\text{„Leontief-Inverse“}} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} \tag{6}$$

mit

$$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = (d_{ik}) = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Das Leontief-Modell
Struktur

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

Frage

Wie groß muss der Bruttooutput $\tilde{x}_i$ sein, um über den (gegebenen) Nettooutput y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ verfügen zu können?

$$\tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k = d_{i1} y_1 + \cdots + d_{in} y_n \quad \text{mit } d_{ik} \frac{[ME_i]}{[ME_k]} \tag{8}$$

Leontief-Inverse (d_{ik})

d_{ik} ist die *gesamtwirtschaftliche* Bruttoproduktion der Ware i, um *netto* über eine Einheit der Ware k zu verfügen.

Das Leontief-Modell
Struktur

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

Beispiel: Kohle (Ware 1) und Stahl (Ware 2)

d_{12} sagt aus, wieviel Tonnen Kohle *insgesamt* in der Volkswirtschaft benötigt werden, um z.B. auf einer Chemnitzer Baustelle 1 Tonne Stahl verarbeiten zu können.

d_{ik} und a_{ik} nicht verwechseln!

a_{12} gibt an, wieviel Tonnen Kohle zur Bruttoproduktion einer Tonne Stahl *in der Stahlindustrie* benötigt werden.

Definition Inputkoeffizient

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

- Gesucht: Vektor der primären Inputs $\boldsymbol{z}$ bei gegebener Bruttoproduktion $\boldsymbol{x}$
- Vorgehen analog zum Inputkoeffizienten

$$c_{ik} = \frac{z_{ik}}{\tilde{x}_k} \frac{[MI_i]}{[ME_k]} \quad \text{mit } c_{ik} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z_{ik}[MI_i] = c_{ik} \frac{[MI_i]}{[ME_k]} \tilde{x}_k [ME_k] = c_{ik} \tilde{x}_k [MI_i] \tag{9}$$

Primärer Inputkoeffizient c_{ik}

Menge des primären Inputs i, die zur Produktion *einer Einheit* von Ware k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *im* Sektor k benötigt wird

Lineare Produktionsmodelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

Für die i-te Komponente von $\boldsymbol{z}$ gilt

▸ IOT

$$\tilde{z}_i = \sum_{k=1}^{n} z_{ik} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\tilde{x}_k \tag{10}$$

In Matrizenschreibweise

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{y} \tag{11}$$

Ergebnis

$\boldsymbol{z}$ gibt an, wieviel primäre Inputs benötigt werden, um einen gegebenen Nettooutput $\boldsymbol{y}$ produzieren zu können.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
Das Leontief-Modell
Anwendungen
Lineare Produktionsmodelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

- Arbeitswerttheorie: Primärinput Arbeitskraft ist Ursache aller Wertschöpfung
- „Klassisches Wertgesetz“: Warenwert proportional zur eingesetzten *gesellschaftlich notwendigen* Arbeitszeit
- Adam Smith (1723-1790), David Ricardo (1772-1823), Karl Marx (1818-1883)
- Vgl. Veröffentlichungen des Lehrstuhls VWL II und VL „Produktions- und Werttheorie“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
Das Leontief-Modell
Anwendungen
Lineare Produktionsmodelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

- These: Arbeitswerte können aus PIOT berechnet werden
- j-te Zeile von $\boldsymbol{Z}$ erfasse den Primärinput Arbeitskraft
  ▸ IOT
- $\ell_k[\frac{h}{ME_k}]$:= zur Produktion der Ware k unmittelbar erforderliche Arbeitszeit
- $\boldsymbol{\ell}$:= Arbeitszeitvektor
- Achtung: ℓ_k ist *nicht* der Arbeitswert der Ware k
- Arbeitswerte aller Vorleistungen müssen addiert werden
- Berechnung ist Spezialfall von (11)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
Das Leontief-Modell
Anwendungen
Lineare Produktionsmodelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y} \tag{11}$$

(11) anwenden auf die Zeile des Arbeitszeitvektors $\boldsymbol{\ell}$

$$z_j = \boldsymbol{\ell x} = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y} \tag{12}$$

Ergebnis

z_j sind die insgesamt eingesetzten Arbeitsstunden, um den gegebenen Nettooutput $\boldsymbol{y}$ zu produzieren.

Das Leontief-Modell
Anwendungen

- Wir haben: Gesamte Arbeitsstunden für gegebenes $\boldsymbol{y}$
- Wir suchen: Arbeitsstunden inkl. Vorleistungen für $1[ME_k] \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$
- Aus (12) wird dann

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \tag{13}$$

Ergebnis

$\boldsymbol{\lambda}$ ist der Vektor der Arbeitswerte. Die k-te Komponente dieses Vektors gibt an, wieviel Arbeitszeit *insgesamt*, d.h. *direkt* und *indirekt* eingesetzt werden muss, damit eine Einheit der Ware k für den Endverbrauch zur Verfügung steht.

Das Leontief-Modell
Anwendungen

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

Alternative Herleitung:

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\ell} \tag{14}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\ell} \tag{15}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\ell} \tag{16}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \tag{17}$$

Literatur

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

- ORTLIEB, CLAUS PETER: *Mathematische Modellierung und Simulation.* `http://www.math.uni-hamburg.de/home/ortlieb/modellierung/skript3.pdf`.
- PASINETTI, LUIGI L.: *Vorlesungen zur Theorie der Produktion.* Marburg 1988.
- HOLUB, HANS-WERNER/SCHNABL, HERMANN: *Input-Output-Rechnung: Input-Output-Analyse.* München 1994.

Links

Lineare Produktions-modelle 1
Nils Fröhlich
Input-Output-Tabellen
Aufbau
Physische Input-Output-Tabellen
Das Leontief-Modell
Struktur
Anwendungen
Literatur/Links

- STATISTISCHES BUNDESAMT: *Verschiedene Dokumente zur Input-Output-Analyse.* `http://www.destatis.de/themen/d/thm_volksw.php`
- INTERNATIONAL INPUT-OUTPUT ASSOCIATION `http://www.iioa.org`