

Prüfung

Operations Research

Prof. Dr. Matthias G. Wichmann
MUSTERKLAUSUR

Nachname:

Last name

Vorname:

First name

Matrikelnummer:

Matriculation number

Studiengang:

Study program

Prüfungsfähigkeit:

State of health

Mit der Unterschrift bestätige ich, dass ich mich gesundheitlich in der Lage fühle die Prüfung durchzuführen.

With this signature I declare that I am feeling healthy to participate at the exam.

Unterschrift:

Signature

Vom Kontrollierenden auszufüllen:

To be filled by the examiner:

Aufgabe	OR		Gesamtpunktzahl
	OR 1	OR 2	
Maximale Punktzahl	30	30	60
Erreichte Punktzahl			

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

Bearbeitungshinweise

- Überprüfen Sie sofort nach Erhalt die Vollständigkeit (11 Blätter inklusive Deckblatt) des Klausurexemplars.
- Schreiben Sie auf jede Seite die letzten drei Ziffern Ihrer Matrikelnummer.
- Zur Lösung – auch für Konzepte – sind nur die vorgesehenen Lösungsfelder zu benutzen. Wenn Sie darüber hinausgehend Platz benötigen, verwenden Sie zunächst die Rückseite des jeweiligen Blattes und vermerken Sie dies. Verwenden Sie kein eigenes Papier. Bei weiterem Platzbedarf wenden Sie sich bitte an die Aufsicht, um entsprechend gekennzeichnetes Papier zu erhalten.
- Die Antworten müssen in der Sprache der Fragen gegeben werden.
- Die Bearbeitungszeit ergibt sich aus dem Prüfungsmodus (Einzelklausur, Kombinationsklausur) und wird von der Aufsicht angekündigt.
- Als Hilfsmittel sind nur Schreib- und Zeichengeräte, eine halbe handschriftlich beschriebene A4 Seite sowie ein nichtkommunikationsfähiger Taschenrechner zulässig.

Instructions

- Verify that your copy of the exam is complete (11 sheets including cover page).
 - Write down the last three digits of your matriculation number on each sheet.
 - Use the provided solution space for your answers. If you need additional space, use the back of the respective sheet and make a note. Do not use your own paper. Additional approved paper may be obtained from the supervisor.
 - The answers must be given in the language of the questions.
 - The allowed time depends on the type of exam (single exam, combined exam) and is announced by the supervisor.
 - Allowed tools are writing and drawing utensils, half a handwritten A4 page and as well as a non-communicating calculator.
- .

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

Operations Research

Aufgabe OR 1: Ganzzahlige Optimierung

(30 Punkte)

Sie möchten mit Freunden, die mit Ihnen die Vorlesung Operations Research besucht haben, eine mehrtägige Fahrradtour unternehmen, die in Dresden starten und enden soll. Nachts soll in Unterkünften entlang der Strecke übernachtet werden. Als Akademiker möchten Sie selbstverständlich wissenschaftlich fundiert planen.

a) *Beschreiben* Sie den Ablauf eines OR-gestützten Entscheidungsprozesses! (6 Punkte)

###MUSTERLÖSUNG###



Problem (inklusive Restriktionen) und Ziel verbal beschreiben (1 Punkt) → Vereinfachung komplexer Zusammenhänge durch Abstraktion (1 Punkt)

Mathematisches Modell (1 Punkt)

Datenbeschaffung (1 Punkt)

Optimierungsverfahren (1 Punkt)

Interpretation/Entscheidung (Anwendung in Realität) (1 Punkt)

###MUSTERLÖSUNG ENDE###

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

b) Die Teilnehmer der Reise haben Orte vorgeschlagen, die besucht werden könnten.

- Bastei (Sächsische Schweiz)
- Meißen
- Schloss Moritzburg
- Schloss Wackerbarth (Radebeul)
- Schloss Pillnitz

Sie befürchten jedoch, dass Sie nicht alle Orte besuchen können. Jemand schlägt deshalb folgendes Vorgehen vor: Sie bewerten jeden Ort hinsichtlich der Anforderung an die körperliche Fitness und der Attraktivität jeweils auf einer Skala von 1 (besonders einfach zu erreichen bzw. eher unattraktiv) bis 5 (sehr herausfordernd bzw. atemberaubend schön). Sie haben sich auf folgende Bewertung geeinigt (Tabelle OR1.1):

Ort	Attraktivität	Fitness
Bastei x_1	5	5
Meißen x_2	3	4
Schloss Moritzburg x_3	4	3
Schloss Wackerbarth x_4	5	2
Schloss Pillnitz x_5	3	1

Tabelle OR1.1: Bewertung der Alternativen

Um es einfach zu halten, einigen Sie sich darauf, den Gesamtwert der erforderlichen Fitness auf 7 zu begrenzen.

Jemand weist darauf hin, dass die Zielauswahl ein ganzzahliges Entscheidungsproblem darstellt. Sie beschließen deshalb, es als Rucksackproblem zu lösen.

- *Zeichnen* Sie den notwendigen Entscheidungsbaum und *ermitteln* Sie jeweils die Zielfunktionswerte (also die Attraktivität der besuchten Orte).
- *Erläutern* Sie kurz die Auslotregeln, die Sie verwenden.
- *Welche* Orte wird die Gruppe besuchen und *wie hoch* ist die Gesamtattraktivität der Tour?

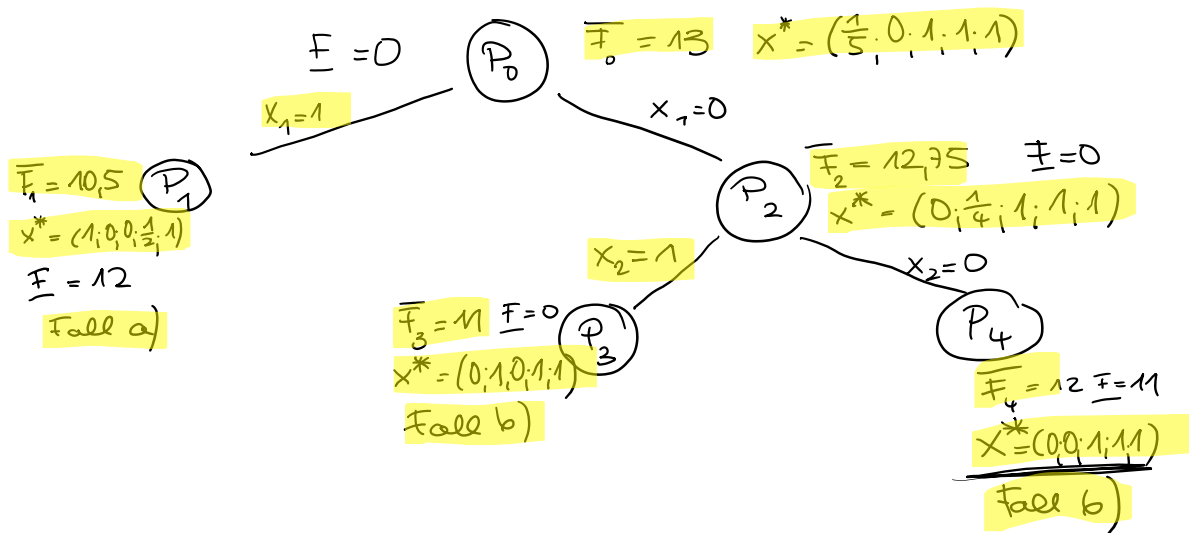
(20 Punkte)

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

Hinweise:

- Geben Sie für jedes Teilproblem i die berechnete obere bzw. untere Schranke \bar{F}_i bzw. \underline{F} (anfangs gilt $\underline{F} = 0$) sowie die Ausprägungen der Entscheidungsvariablen $x^*(P_i')$ für die relaxierten Probleme an.
- Beim Verzweigen möchten Sie Orte, die nicht ganz besucht werden können, erst erlauben, dann verbieten.
- Die Auswahl der Teilprobleme soll mithilfe der MUB-Regel erfolgen und es sollen die Auslotregeln a) bis c) angewandt werden.

MUSTERLÖSUNG



Besucht werden **Schloss Moritzburg, Schloss Wackerbarth und Pillnitz**. Der Gesamtnutzen beträgt **12 Einheiten** (2 P).

- je Teilproblem 2 Punkte (obere Schranke und Ausprägung der Entscheidungsvariablen) (insgesamt 10 P)
- je 1 Punkt für Verzweigungsentscheidung (insgesamt 2 P)
- je 1 Punkt für jedes Ausloten (insgesamt 3 P)
- 1 Punkt je Auslotregel (insg. 3)

MUSTERLÖSUNG ENDE

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

- c) Alle sind mit der Tour einverstanden und Sie begeben sich gemeinsam auf die Reise. Im Nachgang meint ein Teilnehmer, dass eigentlich alle Orte gleich attraktiv sind. Er schlägt für die nächste Ausfahrt vor, stattdessen die Anforderung an die Fitness zu minimieren. Können Sie die Ziele noch immer mit dem in Teil b) verwendeten Verfahren auswählen? Falls ja: *Beschreiben* Sie Ihr Vorgehen bei einem ganzzahligen Optimierungsproblem, dessen Zielfunktionswert (hier: die Anforderung an die Fitness) minimiert werden soll. Gehen Sie konkret darauf ein, wie Sie eine vollständige Enumeration vermeiden. Falls nein: Was müsste am Verfahren geändert werden? (4 Punkte)

MUSTERLÖSUNG

Minimierungsproblem:

Folgende Aussagen möglich (müssen nicht vollständig genannt werden)

- Es wird eine weitere Nebenbedingung außer der Ganzzahligkeit benötigt, sonst ist das Ergebnis 0 (keine Reise) (2 P.). Zum Beispiel Anzahl der zu besuchenden Orte vorgeben. (2 P.)
- Verhinderung der vollständigen Enumeration durch Bounding (1 P): Bei Minimierungsproblem „vertauscht“: lokale untere Schranke (2 P.) und globale obere Schranke (2 P) (z. B. Summe aller Fitnesswerte oder $+\infty$)
- Aussagen zum Vorgehen beim Verzweigen (bspw. MUB oder FIFO) (1 P)

MUSTERLÖSUNG ENDE

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

Aufgabe OR 2: Lineare Optimierung

(30 Punkte)

Sie bewerben sich um eine Stelle als Werkstudierender für die modellbasierte Planung in einem mittelständischen Unternehmen.

- a) Um Ihre Eignung zu überprüfen, bittet Sie der Geschäftsführer, ihm die Funktionsweise des Primalen Simplex-Algorithmus zu *erläutern*. (Natürlich achten Sie darauf, nicht das Vorgehen zu beschreiben...) Zudem möchte er von Ihnen wissen, ob dieses Verfahren mit Sicherheit die optimale Lösung bestimmt. *Wie lautet Ihre Antwort?* (3 Punkte)

###MUSTERLÖSUNG

Ausgehend von einer zulässigen Basislösung (1 P.), werden benachbarte Basislösungen durch Austausch genau einer Basisvariable durch eine Nichtbasisvariable betrachtet (1. P). Solange das Ergebnis nicht optimal ist (da mindestens ein Wert in der F-Zeile negativ ist), geht man zur nächsten Basislösung über, indem man genau eine Basisvariable durch eine Nichtbasisvariable ersetzt. Insofern eine optimale Lösung existiert, wird diese durch das Verfahren gefunden. (1 P.)

###MUSTERLÖSUNG ENDE###

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

- b) Sie merken gleich, dass der Geschäftsführer eine Schwäche für OR hat. Als nächstes möchte er prüfen, wie gut Sie die Begrifflichkeiten kennen und legt Ihnen hierzu folgende Multiple Choice Fragen vor:

Kreuzen Sie die zutreffenden Aussagen an. Es sind je drei richtig. Sollten Sie mehr als drei Kreuze in einem Bereich setzen, werden die ersten drei gewertet.

(6 Punkte)

Schattenpreise

- befinden sich in der letzten Spalte des Simplex-Tableaus (b) bei Basisvariablen.
- beziehen sich auf Strukturvariablen.
- sind im Optimaltableau ≥ 0 .
- geben an, um wie viele Einheiten der Zielfunktionswert sinkt, wenn diese Nichtbasisvariable mit einer Einheit in die Lösung aufgenommen wird.
- stehen für die Steigerung des Zielfunktionswertes, wenn die betreffende Ressource um genau eine Einheit erhöht wird.
- beziehen sich auf Nebenbedingungen.

Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit ein Lineares Problem in Standardform vorliegt?

- Die Zielfunktion muss alle Struktur- und Schlupfvariablen enthalten.
- Die Nebenbedingungen müssen Gleichheitsbeziehungen aufweisen.
- Für alle Variablen muss eine Nichtnegativitätsbedingung vorhanden sein.
- Es muss ein Maximierungsproblem vorliegen.
- Die rechte Seite aller Nebenbedingungen muss ≥ 0 sein.
- Es dürfen nur Nebenbedingungen mit „ \leq “- Beziehungen vorhanden sein (Ausnahme: Nichtnegativitätsbedingung).
- Die Einheitsmatrix unter den Schlupfvariablen muss gegeben sein.

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

MUSTERLÖSUNG

Schattenpreise

-
- befinden sich in der letzten Spalte des Simplex-Tableaus (b) bei Basisvariablen.
 - beziehen sich auf Strukturvariablen.
 - sind im Optimaltableau ≥ 0 .
 - geben an, um wie viele Einheiten der Zielfunktionswert sinkt, wenn diese Nichtbasisvariable mit einer Einheit in die Lösung aufgenommen wird.
 - stehen für die Steigerung des Zielfunktionswertes, wenn die betreffende Ressource um genau eine Einheit erhöht wird.
 - beziehen sich auf Nebenbedingungen.

Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit ein Lineares Problem in Standardform vorliegt?

- Die Zielfunktion muss alle Struktur- und Schlupfvariablen enthalten.
- Die Nebenbedingungen müssen Gleichheitsbeziehungen aufweisen.
- Für alle Variablen muss eine Nichtnegativitätsbedingung vorhanden sein.
- Es muss ein Maximierungsproblem vorliegen.
- Die rechte Seite aller Nebenbedingungen muss ≥ 0 sein.
- Es dürfen nur Nebenbedingungen mit „ \leq “-Beziehungen vorhanden sein (Ausnahme: Nichtnegativitätsbedingung).
- Die Einheitsmatrix unter den Schlupfvariablen muss gegeben sein.

###MUSTERLÖSUNG ENDE###

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

- c) Zum Abschluss legt Ihnen der Geschäftsführer ein Optimaltableau (*Tabelle OR2.1*) vor, das Ihre Vorgängerin mithilfe des Primalen Simplex-Algorithmus erstellt hat.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	1/2	1/2	0	0	20
x_4	0	10	-5	1	0	40
x_5	0	-1/4	-3/4	0	1	3
F	0	5	25	0	0	1000

Tabelle OR2.1 Optimaltableau

Wie viele Nebenbedingungen hat das Lineare Problem und welche (Schlupf-)Variablen sind ihnen zuzuordnen? (2 Punkte)

.....

Wie lautet das optimale Produktionsprogramm (beziehen Sie sich auf alle Strukturvariablen)? (1 Punkt)

.....

Wie hoch ist der Deckungsbeitrag bei Umsetzung dieses Programms? (1 Punkt)

.....

Kommentieren Sie die markierten Felder – was bedeuten die angegebenen Zahlen? (2 Punkte)

1

2

.....

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

MUSTERLÖSUNG

3 Nebenbedingungen (da es drei Basisvariablen gibt) (1 P.): x_3, x_4, x_5 (1 P.)

Optimales Produktionsprogramm: $x_1 = 20; x_2 = 0$ (1 Punkt)

Deckungsbeitrag: 1000 GE (1 Punkt)

1 Reduzierte Kosten: Für jedes x_2 , das produziert wird, sinkt der DB um 5 GE.
(1 P.)

2 Verfügbare Restkapazität der 2. Ressource/Nebenbedingung/Schlupfvariable x_4 (1 P.)

MUSTERLÖSUNG ENDE

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

- d) Der Geschäftsführer ist beeindruckt von Ihren Kenntnissen und bietet Ihnen die Stelle als Werkstudierender an, die Sie gern annehmen. Der Mitarbeiter, der Sie in den ersten Tagen begleitet, formuliert die erste Problemstellung:

„Wir fertigen zwei verschiedene Produkte (x_1 und x_2). Die Stückkosten betragen 5 und 20 Euro. Ermitteln Sie bitte das kostenoptimale Produktionsprogramm.“

Wie lautet die Zielfunktion?

.....

Ihre Vorgängerin hatte bereits die Nebenbedingungen notiert:

$$5x_1 + 3x_2 \geq 210$$

$$x_2 \geq 20$$

Nehmen Sie ggf. Umformungen vor und lösen Sie das Problem mithilfe einer geeigneten Variante des Simplex Algorithmus. Kennzeichnen Sie jeweils das Pivotelement. (10 Punkte)

Hinweis: Sie benötigen ggf. nicht alle Zeilen und Spalten.

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

MUSTERLÖSUNG

ZF: $\min F(x_1, x_2) = 5x_1 + 20x_2$ (1 P.)

Umformungen (3 P.):

$$\max F(x_1, x_2) = -5x_1 - 20x_2$$

$$-5x_1 - 3x_2 \leq -210$$

$$-x_2 \leq -20$$

	x1	x2	x3	x4	
x3	-5	-3	1		-210
x4		-1		1	-20
F	5	20			0
	-1	-6 2/3			

x1	1	3/5	- 1/5	0	42
x4	0	-1	0	1	-20
F	0	17	1	0	-210

x1	1	0	- 1/5	3/5	30
x2	0	1	0	-1	20
F	0	0	1	17	-550

1 P. für korrekte Eintragung des Problems in das Starttableau

2 P für Pivotelemente

3 P. für Lösung (x_1, x_2 und ZFW)

MUSTERLÖSUNG ENDE

Letzte drei Ziffern der Matrikelnummer:

- e) Nachdem Sie Ihren ersten Auftrag (Aufgabe d)) erledigt haben, gibt der Geschäftsführer zu bedenken, dass es nicht immer sinnvoll ist, ausschließlich Kosten minimieren zu wollen. Der Stückdeckungsbeitrag sei wichtiger. Die Restriktionen aus Aufgabe d) gelten weiterhin. Inwiefern ändert sich das Optimierungsproblem? Treffen Sie Aussagen zur Lösbarkeit und zur erwarteten Entwicklung des Zielfunktionswertes. Begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: Sie müssen keine Berechnungen durchführen. (5 Punkte)

MUSTERLÖSUNG

Die Optimierungsrichtung ändert sich – es ist jetzt ein Maximierungsproblem. (1 P.)

Es ist nun nicht mehr möglich, eine optimale Lösung zu ermitteln, da der Lösungsraum in dieser Richtung unbeschränkt ist. (2 P.)

Da die Höhe der Deckungsbeiträge nicht genannt wird, lassen sich keine Vermutungen zur Entwicklung des ZFW anstellen. Allerdings geht er im unbeschränkten Raum gegen Unendlich. (2 P.)

MUSTERLÖSUNG ENDE