DFG–Forschergruppe
“Algorithmische Grundlagen der Simulation ausgewählter Probleme der Kontinuumsmechanik auf massiv parallelen Rechnern”

an der

Fakultät für Mathematik der
Technischen Universität Chemnitz–Zwickau

und

DFG–Schwerpunkt
“Randelementmethoden”

Abstrakts

Workshop

über

“Paralleles wissenschaftliches Rechnen in FEM und BEM”

Chemnitz, 27.09.1995 – 30.09.1995

Ein Vergleich der Vertex- und Wirebasket-Methode für 3D Potential- und Elastizitätsprobleme

H. Andrä und Th. Rischar

Institut für Technische Mechanik/Festigkeitslehre
Universität Karlsruhe (T.H.)
Kaiserstr. 12
D–76128 Karlsruhe

e–mail: `heiko@imfsun2.mach.uni-karlsruhe.de`

Im Vortrag werden Gebietszerlegungsalgorithmen verglichen, bei denen ein Schur-System iterativ mit dem PCG-Verfahren gelöst wird, wobei sich die Algorithmen vor allem in der Wahl des globalen Anteils des Vorkonditionierers, d. h. in der Wahl einer Grobgitterapproximation unterscheiden.

Die Tetraederlemente oder Hexaederelemente einer üblichen FE-Triangulierung mit dem Gitterparameter H werden als Substrukturen aufgefaßt. Diese Substrukturen werden wiederum in kleine Tetraeder mit dem Gitterparameter h zerlegt. Danach erfolgt die FE-Diskretisierung der Substrukturen. Als zweite alternative Variante werden für die Substrukturen Oberflächennetze mit dem Gitterparameter h erzeugt als Ausgangspunkt für eine Randelement-Diskretisierung (BE-Diskretisierung). Das Ergebnis dieser Diskretisierungen ist ein blockstrukturiertes Gleichungssystem. Durch Elimination der inneren Freiheitsgrade der FE-Substrukturen wird ein Schur-System erhalten, das Ausgangspunkt für die iterative Gleichungslösung ist.

Die für die Vorkonditionierung des Schur-Systems notwendige Grobgitterapproximation wird bei der Vertex-Methode durch eine FE- oder BE-Diskretisierung bzgl. des Grobgitterparameters H erhalten.

Der "Wirebasket" besteht aus allen Knoten, die zu mehr als zwei Substrukturen gehören. Die Wirebasket-Methode basiert auf der Berechnung von Mittelwerten der Näherungslösung auf dem "Wirebasket" und deren Interpolation auf die Flächen der Substrukturen. Numerische Testrechnungen zeigen, daß die Wirebasket-Methode zumindest bei skalaren elliptischen Gleichungen zu bevorzugen ist.

Anisotropic interpolation error estimates and applications

Thomas Apel

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: apel@mathematik.tu-chemnitz.de

For the approximation of anisotropic structures like edges and boundary/interior layers it is an obvious idea to use a family of finite element meshes with different mesh sizes in different directions, so called anisotropic meshes.
The paper gives an overview over anisotropic local interpolation error estimates for simplicial Lagrangian finite elements in two and three dimensions. In particular, the specific assumptions for these estimates, namely a maximal angle condition and a coordinate system condition, are discussed.
Using these elements, anisotropic mesh refinement strategies are justified for treating edge singularities in Poisson problems and boundary layers in convection dominated problems.

Zur Approximation anisotroper Strukturen, gedacht ist z. B. an Kanten oder Randschichten, ist es naheliegend, anisotrope Finite-Elemente-Vernetzungen zu wählen. Darunter sollen Familien von Netzen verstanden werden, deren Durchmesser in verschiedenen Raumrichtungen unterschiedliche Asymptotik besitzt.
Für die numerische Analysis solcher Verfahren ist es von Vorteil, lokale Interpolationsfehlerabschätzungen zu kennen, die diese unterschiedliche Asymptotik verwerten. Im Vortrag soll ein Überblick über derartige Abschätzungen für simpliziale Lagrangesche Elemente in 2 und 3 Raumdimensionen gegeben werden. Insbesondere werden die geometrischen Veraussetzungen an solche Vernetzungen diskutiert.
Anisotrope finite Elemente konnten zur Behandlung von Kantensingularitäten in Poisson-Problemen und von Randschichten in einem einfachen Konvektions-Diffusions-Modell erfolgreich eingesetzt werden. Es wurden Finite-Elemente-Vernetzungen angegeben, mit denen eine (fast) optimale Ordnung des Diskretisierungsfehlers erzielt wird, was mit oben genannten Abschätzungen bewiesen wurde.

Algebraische Gebietszerlegungsmethoden

Matthias Bollhöfer

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: bolle@mathematik.tu-chemnitz.de

Es werden algebraische Methoden zur Lösung großer schwachbesetzter Systeme auf Parallelrechnern diskutiert. Diese Methoden basieren auf dem Divide & Conquer–Prinzip und der Sherman–Morrison–Woodbury–Formel für die Invertierung von Matrizen bei Modifikationen niedrigen Ranges.

$$(S - FG)^{-1} = S^{-1} + S^{-1}F(\underbrace{I - GS^{-1}F}_{S_c})^{-1}GS^{-1}$$

Ausgehend vom ungerichteten Graphen der Matrix wird zunächst eine Zerlegung des Graphen in Teilgraphen entsprechend der Prozessorzahl vorgenommen. Das Restsystem ist dann von niedrigem Rang. Durch algebraische Modifikation wird der Rang nochmal verringert. Hauptproblem ist bei dieser Vorgehensweise die Lösung des Kopplungssystems S_c. Hierfür werden Krylov–Unterraum–Verfahren verwendet. Numerische Probleme, welche etwa durch ungünstige Eigenwertverteilung entstehen, versucht man durch eine geschachtelte Verwendung dieser Formel zu behandeln. Das auf diese Weise entstehende Verfahren steht in engem Zusammenhang mit algebraischen Mehrgitterverfahren, wie sie u.a. von Ruge/Stüben, Axelsson, Dahmen/Elsner behandelt worden sind.

Parallele adaptive Mehrgitterverfahren in der Elastomechanik mit dem Programm *ug*

Knut Eckstein

Graduiertenkolleg Kontinua und Strömungen
ISD, Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 27
D–70550 Stuttgart

e–mail: `eckstein@isd.uni-stuttgart.de`

Vorgestellt wird der Einbau einer Finiten–Elemente–Problemklasse für ebene Elastizitätsprobleme in den Mehrgitter–Programmbaukasten *ug*. Der modulare Aufbau dieses Baukastens erlaubt neben dem Einsatz verschiedener Glätter, Transferoperatoren und Mehrgitterverfahren die Einbindung verschiedener Message–Passing Bibliotheken und damit den Vergleich zwischen Parallelrechnern des Typs Cray T3D, ParsytecGC/PowerPlus und Intel Paragon. Die Integration eines Verfeinerungsindikators führt auf die parallele adaptive Berechnung von ebenen Problemen der Elastizitätstheorie auf unstrukturierten Gittern. Im Ausblick werden die in Arbeit befindliche Integration einer Materialschnittstelle für nichtlineare Stoffmodelle und der geplante Einsatz robuster, auf Dreifeldansätzen basierender Elemente vorgestellt.

This talk covers the implementation of a finite element plane elasticity problem class in the multigrid software toolkit *ug*. The modular design of that toolkit allows not only for the use of different smoothing procedures, intergrid transfer operators and multigrid solution schemes but also for embedding of several message passing libraries which leads to a performace comparison between a Cray T3D, a ParsytecGC/PowerPlus and an Intel Paragon. Integration of a refinement indicator yields parallel adaptive calculations on unstructured grids. Future work is going to include a material data interface for physically nonlinear calculations and the use of more robust B–bar–type elements.

Fast solvers for linear FEM–BEM coupling

Stefan A. Funken and Ernst P. Stephan

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1
D–30167 Hannover

e–mail: funken@ifam.uni-hannover.de
stephan@ifam.uni-hannover.de

We present two optimal preconditioned iterative methods to solve indefinite linear systems of equations arising from symmetric coupling of Finite Elements and Boundary Elements. These solvers are optimal in the sense, that their convergence rate is independent of the number of unknowns.
They are based either on the conjugate residual method with block diagonal preconditioning, where no Schur Complement construction is required, or on an inner–outer iteration of Axelsson and Vassilevski. Both methods use multigrid of seperate positive semi–definite and negative definite parts of the coupled operator.
The efficiency of the solvers is shown by numerical experiments yielding fast convergence.

On automatically parallel mesh generation methods for triangular and tetrahedral meshes

Gerhard Globisch

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: gglobisc@mathematik.tu-chemnitz.de

We developed a program for the automatically parallel triangular mesh generation in arbitrary bounded plane domains that are a-priori divided up into several simply connected subdomains. Its output data structure is very suitable for further performing parallel hierarchical mesh generation in each subdomain starting from the first triangulation. The program package called PARMESH can be an efficient ingredient for parallel numerical solvers. Based on PARMESH a program for the efficient parallel generation of tetrahedral meshes in a wide class of three dimensional domains having a generalized cylindric shape is presented. The applied mesh generation strategy is due to the decomposition of some 2D-reference domain into simply connected subdomains. By means of the reference triangulations of these subdomains the tetrahedral layers are built up totally in parallel. Some adaptive grid controlling as well as nodal renumbering are involved. Several numerical examples are presented to demonstrate the efficiency of the applied mesh generation techniques.
Dazu gibt es die folgende Literatur:

[1] G. Globisch, PARMESH – a parallel mesh generator, *Parallel Computing* 21, (no. 3, pp. 509–524, 1995). and in: *Preprint-Reihe der Chemnitzer DFG-Forschergruppe "Scientific Parallel Computing"*, (SPC 93_3, June 1993).

[2] G. Globisch, On an automatically parallel generation technique for tetrahedral meshes, Preprint-Reihe *der Chemnitzer DFG-Forschergruppe "Scientific Parallel Computing"*, (SPC 94_6, April 1994). submitted to *Parallel Computing*.

FEM auf irregulären hierarchischen Dreiecksnetzen

Ulrich Groh

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: ugroh@imech.tu-chemnitz.de

Moderne Multilevel-Vorkonditionierungen für die iterative Lösung der FEM-Gleichungssysteme von elliptischen Problemen 2. Ordnung (z.B. Yserentant- oder BPX-Vorkonditionierung oder Multigrid-Techniken) sind auf hierarchische Netzstrukturen angewiesen. Für adaptive Verfahren wäre deshalb die Nutzung solcher einfachen lokalen Verfeinerungsalgorithmen attraktiv, bei denen die Zerlegungung aller zu verfeinernden Elemente nach dem gleichem Schema und unabhängig von den Nachbarelementen erfolgt, etwa bei Dreiecken durch Verbindung der Kantenmitten. Dabei können Eckknoten von Elementen entstehen, die auf dem Rand eines anderen Elementes liegen, ohne dort Eckknoten zu sein, sogenannte irreguläre Knoten (hanging nodes). Dieses Vorgehen ist bei der Finite-Volumen-Methode durchaus üblich, wird in der FEM jedoch wegen des Problems der Basisfunktionen in den irregulären Knoten weitgehend vermieden und wurde deshalb detaillierter untersucht.
Schwerpunkte bilden die Prinzipien der Konstruktion der hierarchischen Basis und der FEM-Basis auf dem ungleichmäßigen hierarchischen Netz, die Assemblierungstechnologie für das FEM-Gleichungssystem und dessen Lösung mittels Yserentant- oder BPX-vorkonditioniertem CG-Algorithmus. Dabei kann die auf regulären Netzen übliche Assemblierungstechnik übernommen werden, wenn die üblichen konformen hierarchischen Basisfunktionen in regulären Knoten durch entsprechende unstetige “halbe Hütchenfunktionen” in den irregulären Knoten ergänzt werden. Es ist bei den Iterationsverfahren dann nur darauf zu achten, daß der Iterationsprozeß im Teilraum der konformen hierarchischen Basisfunktionen abläuft. Dies ist während der beiden genannten Vorkonditionierungen leicht möglich, und zwar durch Projektion zwischen hierarchischer Basistransformation und Rücktransformation. Die Parallelisierung durch Gebietszerlegung bereitet keine zusätzlichen Probleme.

An Improvement of the Hierarchical Extension Technique by Smoothing and its Use in a Domain Decomposition Preconditioner

Gundolf Haase

Johannes Kepler Universität Linz
Altenbergerstraße 69
A–4040 Linz

e–mail: ghaase@numa.uni-linz.ac.at

This talk presents some new results in the development of fast Dirichlet ASM-DD-preconditioners in the DD-preconditioned conjugate gradient (cg) method. The most sensitive part in the Dirichlet DD-preconditioner is the approximate execution of the operation

$$\underline{v}_I \;=\; -K_I^{-1}\, K_{IC}\, \underline{w}_C \qquad \text{(harmonical extension)}$$

which will be done by a hierarchical extension technique with an exact harmonical extension on the coarsest level and postsmoothing sweeps ($S_{I,k}$ - Gauss-Seidel smoother) on all other levels :

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}_{IC,2} &= S_{I,2}^{\nu_2}\left[Q_{I,2}\, K_{I,1}^{-1}\,(-K_{IC,1}) + Q_{IC,2}\right] Q_{C,2}^{-1}\,, \\
\widetilde{E}_{IC,k} &= S_{I,k}^{\nu_k}\left[Q_{I,k}\, \widetilde{E}_{IC,k-1} + Q_{IC,k}\right] Q_{C,k}^{-1} \qquad\qquad \forall k = \overline{3,\ell}\,,
\end{aligned}$$

where Q is the transformation from the hierarchical basis into the usual FE-nodal basis and $K = K^T$ p.d. denotes the finite element stiffness matrix the block partitioning $(K_C, K_{CI} : K_{IC}, K_I)$ of which corresponds to the DD as usual.
This new extension operator $\widetilde{E}_{IC,k}$ fills the gap betweeen the exact harmonical extension of a boundary value function and the hierarchical extension of this function. The analysis of the new operator confirms that fact.
Due to the fact that E_{IC}^T includes the first part of a V-multigrid-cycle an algorithmical improvement results additionally in a cheaper preconditioner. A parallelized version of the cg-method using this DD-preconditioner solves a linear system of equations (magnetic field of an electrical motor, complex interface geometry, large jumps in the coefficients, FEM-discretization) with 375 000 unknowns in 46 seconds on the PowerXplorer with 16 processors. The achieved accuracy is 10^{-6} .

Parallel computation of Fourier-finite-element approximations and some experiments

Bernd Heinrich, Beate Lang, and Beate Weber

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: heinrich@mathematik.tu-chemnitz.de
blang@mathematik.tu-chemnitz.de
bweber@mathematik.tu-chemnitz.de

In this talk, we deal with the computation of Fourier–finite–element approximations for the Poisson equation in axisymmetric domains and with some strategy for its parallelization. The underlying Fourier–finite–element method combines the approximate Fourier method, which employs trigonometric polynomials of degree $\leq N$ in one space direction (rotational angle), with the finite–element method for calculating the Fourier coefficients on the two–dimensional meridian of the given axisymmetric domain. These Fourier coefficients are the solutions of a sequence of decoupled boundary value problems in 2D and can be calculated simultaneously on a parallel computer.
For some examples of boundary value problems, several numerical experiments and their results are discussed; e.g. the run times, the speed–up and the scale–up for partial computational steps (computation of function values for the right–hand side, Fourier analysis via parallel FFT, matrix generation, solving the finite–element equations in 2D and Fourier synthesis) of the algorithm are given.

Comparison of Parallelized Iterative Solvers for Finite Element Equations

Michael Jung and Arnd Meyer

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz-Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: dr.michael.jung@mathematik.tu-chemnitz.de
a.meyer@mathematik.tu-chemnitz.de

We present a uniform parallelization strategy for iterative solvers, as e.g., multigrid methods and preconditioned conjugate gradient (PCG) methods with hierarchical preconditioners (Yserentant, BPX) and domain decomposition (DD) preconditioners. The parallelization concept is based on a non-overlapping DD data structure such that our implementations are well-suited for MIMD parallel machines under message-passing.
We discuss in detail the parallelization of a multigrid algorithm. Especially, we propose well-parallelizable smoothers of Gauss-Seidel type. The coarse-grid solver within the multigrid algorithm is a parallel PCG method applied to the corresponding Schur complement system.
The parallelization of the PCG method with hierarchical preconditioners and DD preconditioners are discussed in the talks of M. Thess and G. Haase, respectively.
In this talk we compare the different parallel iterative solvers, and we show some advantages and disadvantages of these methods.

Deformation einer zylindrischen Schale durch radiale Einzellasten

Andreas Koop

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Freiburg
Hermann–Herder–Straße 10
D–79104 Freiburg

e–mail: `koop@mathematik.uni-freiburg.de`

Ziel des Vortrags ist die Darstellung einer konkreten Problemstellung aus dem Bereich Maschinenbau, der mathematischen Modellbildung und des verwendeten numerischen Lösungsansatzes.
Zur Herstellung von Schlauchfolien verwendet man eine Düse in Form eines dünnen ringförmigen Spalts, durch den heiße Kunststoffmasse gepreßt wird. Die Gestalt der Düse kann durch Stellmotoren, die an der äußeren zylindrischen Schale (Flexlippe) äquidistant angebracht sind, reguliert werden, um so eine möglichst gleichmäßige Stärke der Folie zu garantieren. In Abhängigkeit von der Stellung der Motoren und dem durch die Schmelze verursachten hydrostatischen Druck sollen die Gestalt der Flexlippe sowie die auf die Köpfe der Stellmotoren wirkenden Kräfte numerisch berechnet werden.
Das dazu verwendete Schalenmodell, eine System von Differentialgleichungen vierter Ordnung, und der verwendete numerische Lösungsansatz mit C^1-Elementen werden vorgestellt. Besondere Schwierigkeiten treten bei der Numerik durch die schlechte Kondition der Gleichung und den "Locking"-Effekt auf, was besondere Maßnahmen erfordert. Einige numerische Ergebnisse werden vorgestellt und mögliche Ansätze für einen parallelen Lösungsansatz werden aufgezeigt.
Die Arbeit wird in Zusammenarbeit mit der Maschinenfabrik Reifenhäuser (Troisdorf) durchgeführt und vom BMFT im Rahmen des Projektes "Anwendungsbezogene Verbundprojekte auf dem Gebiet der Mathematik" gefördert.

On the Pre-Processing in FE/BE Domain Decomposition Methods

Michael Kuhn, Gundolf Haase, Bodo Heise

Johannes Kepler Universität Linz
Altenbergerstraße 69
A–4040 Linz

e–mail: `kuhn@numa.uni-linz.ac.at`
`ghaase@numa.uni-linz.ac.at`
`heise@numa.uni-linz.ac.at`

Mario Goppold

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: `mgoppold@mathematik.tu-chemnitz.de`

Applying Domain Decomposition (DD) methods for solving p.d.e.'s approximately via a finite element (f.e.), boundary element (b.e.) or a mixed f.e./b.e. discretization requires a DD-data structure. In this paper, we present tools which perform almost automatically the data partitioning starting off with triangular-based data describing the geometry of the problem and ending up with a DD-data format representing the partitioning.
Three codes *Decomp, Tri2DD* and *AdapMesh* which are based on the recursive spectral bisection (s.b.) method, a transformation of triangular-based data into a DD-data format and a parallel mesh generator, respectively, are involved in the pre-processing. We discuss the (iterative) procedure of the data partitioning aiming at a well load-balanced decomposition which allows also the grids to be adapted to singularities.
In the simplest case, the program *Decomp* is used to decompose the domain into subdomains applying the s.b. method followed by *Tri2DD* converting the resulting data into a DD-format. If additional refinement information are used the process is applied iteratively.
Examples demonstrating the algorithm are presented.

Anisotropic error estimators for simplicial finite element meshes

Gerd Kunert

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: gerd.kunert@mathematik.tu-chemnitz.de

Some boundary value problems yield anisotropic solutions, e.g. solutions with boundary layers. If such problems are to be solved with the finite element method, anisotropically refined meshes can be advantageous. In order to construct these meshes or to control the error one aims at reliable error estimators.
Our investigations are restricted to the Poisson equation

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \qquad \text{on } \Gamma_D = \partial\Omega$$

in a polygonal domain Ω. Some basic difficulties arising from the anisotropy are reflected here sufficiently well.
For isotropic meshes residual error estimators for a finite element T are well known:

$$\eta_T(u_h) := \left(h_T^2 \cdot \|f\|_T^2 \; + \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma_D} h_T \cdot \|r_E(u_h)\|_E^2 \right)^{1/2} \qquad .$$

Here u_h is the approximate solution, h_T is the diameter of T, and $r_E(u_h)$ is the gradient jump across an internal face E. All norms are L_2 norms. With this notation

$$\|\nabla(u - u_h)\|^2 \leq c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2(u_h) \tag{1}$$

holds.
For problems with an anisotropic solution (eg. a boundary layer) one may use anisotropic meshes, i.e. meshes where the aspect ratio of the elements can be very large. Then the constant in (1) becomes large, and the estimation is unsatisfactory.
This behaviour can be remedied by anisotropic error estimators. Siebert [1] investigated this for cuboidal meshes. Here we focus on simplicial meshes and obtain the estimator

$$\eta_{1,T}(u_h) := \left(h_{min,T}^2 \cdot \|f\|_T^2 \; + \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma_D} h_E \cdot \|r_E(u_h)\|_E^2 \right)^{1/2} \tag{2}$$

where the factors of the norms are replaced by the smallest element size $h_{min,T}$ and the height h_E over the face E, respectively.
Recently also an L_2 error estimator for anisotropic meshes could be derived.
A main difference to isotropic error estimators is that the anisotropic problem and the anisotropic mesh have to correspond in some way. This is reflected by several assumptions that are required for the proofs of the estimations.

[1] Siebert, K.G.: An a posteriori error estimator for anisotropic refinement, PhD thesis, University of Freiburg, 1994

Eine überlappungsfreie Gebietszerlegungsmethode für inkompressible Strömungsprobleme

Andreas Auge und Gert Lube

Georg–August Universität Göttingen
D–37083 Göttingen

e–mail: `lube@namu01.gwdg.de`

Betrachtet wird eine Schwarzsche Methode ohne Überlappung der Teilgebiete, die ursprünglich von P.L. Lions für lineare elliptische Randwertprobleme 2. Ordnung vorgeschlagen und im kontinuierlichen Fall analysiert wurde. Die Kommunikation zwischen den Teilgebieten erfolgt hier durch eine Robinsche Randbedingung. Von Glowinski und Le Tallec stammt im symmetrischen Fall eine dazu äquivalente augmented Lagrange Formulierung. Verschärfte Konvergenzresultate im symmetrischen Fall stammen von Le Tallec und Sassi.
Im ersten Teil des Vortrages wird gezeigt, daß die Methode auch im gesamten Spektrum von dominanter Diffusion bis zu dominanter Konvektion stabil arbeitet. Speziell ist es möglich, Grenzschichten mittels stark anisotroper Netze aufzulösen.
Im zweiten Teil wird gezeigt, daß die Methode auch bei gemischten Problemen wie dem Stokes– und inkompressiblen Navier–Stokes Problem brauchbare Resultate liefert. Erste numerische Resultate wurden hierzu auf einem Workstation Cluster ermittelt.

DD-preconditioners for plate problems

Holger Matthes

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: Holger.Matthes@mathematik.tu-chemnitz.de

The solution of Kirchoff plate bending problems in domains composed of rectangles is considered. Domain decomposition (DD) is the basic tool for the parallelization of the conjugate gradient method as well for the construction of efficient parallel preconditioners. A so-called Dirichlet DD preconditioner for systems of linear equations arising from the finite element approximation by non-conforming Adini elements is derived. One of its main components is a fast, almost direct solution method for the Dirichlet problem in rectangular domains. The so-called boundary potential method is based on the fast Fourier transform. Further a BPX-like multilevel preconditioner for the Schur-complement is used. The condition number of the preconditioned system of linear equations is bounded by a constant independent of the number of unknowns N and independent of the number of subdomains. The resulting parallel preconditioned conjugate gradient method requires $O(N \ln N \ln \varepsilon^{-1})$ arithmetical operations per processor in order to solve the f.e. equations with the relative accuracy ε. Results of numerical experiments carried out on a multiprocessor system confirm the above mentioned theoretical results.

Erfahrungen bei der Parallelisierung eines komplexen FE–Berechnungsprogramms

Mathias Meisel

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: mmeisel@imech.tu-chemnitz.de

Am Beispiel des FE–Pakets "FEAP", einem Programm zur Festkörpermechanik, wird über Erfahrungen bei der Portierung der sequentiellen Version für Mehrprozessorsysteme unter PARIX berichtet.
Bei dieser Portierung blieben die ursprüngliche Funktionalität und die interaktive Arbeitsweise der sequentiellen Fassung weitestgehend erhalten.
Neben einigen Bemerkungen zur parallelen Realisierung der X11–Grafik stehen die im parallelen FEAP implementierten CG-Verfahren mit Schur–Komplement– bzw. hierarchischer Vorkonditionierung im Mittelpunkt des Vortrags.
Darüber hinaus werden verschiedene Techniken der Interprozessorkommunikation und ihre Auswirkungen auf die Effizienz des CG-Verfahrens betrachtet.

Simulation von elastisch–plastischen Deformationsvorgängen auf Parallelrechnern

Detlef Michael

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: `detlef.michael@imech.tu-chemnitz.de`

The handling of nonlinear problems in solid mechanics has become more and more important for computing "high tech" constructions in engineering. In this way it is significant to provide efficient numerical tools to be used by the engineers. Taking this into account the experimental Finite–Element–System SPC–PMEP was developed for numerical simulations of nonlinear problems as for instance the elasto–plasticity is. This system uses modern numerical algorithms to simulate such problems on parallel computers:

- Domain Decomposition Methods
- Preconditioned Iterative Solvers
- Newton–Raphson–Method with Consistent Linearization
- Newton–Techniques to solve the constitutive equations

The hierarchical preconditioning by *Yserentant* has already sucessfully been applied to different problems (2d–elasticity, convection–diffusion–problems, navier–stokes–simulations). After first promising experiences applying this technique to tangential stiffness matrices evaluated by a method proposed by *Gruttmann* and *Stein*, it was the aim of the authors to find a more general way to deal with classic elasto–plasticity. The result was an efficient parallel finite element code which is until now restricted to plane problems. The method used in stress computation is open for an easy implementation of a wide range of plastic constitutive equations and was sucessfully tested for problems of classic elasto–plasticity.

Preconditioning operators for elliptic problems with parameters

Sergej V. Nepomnyaschikh

Computing Center of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences
Lavrentiev Avenue 6
630090 Novosibirsk
Russia

e–mail: svnep@comcen.nsk.su

Boundary value problems for elliptic equations are considered. The main purpose is the construction of a preconditioning operator for the resulting system of grid equations. The method of the construction is based on three approaches: decomposition into sub-spaces, fictitious space method, and extension operators.

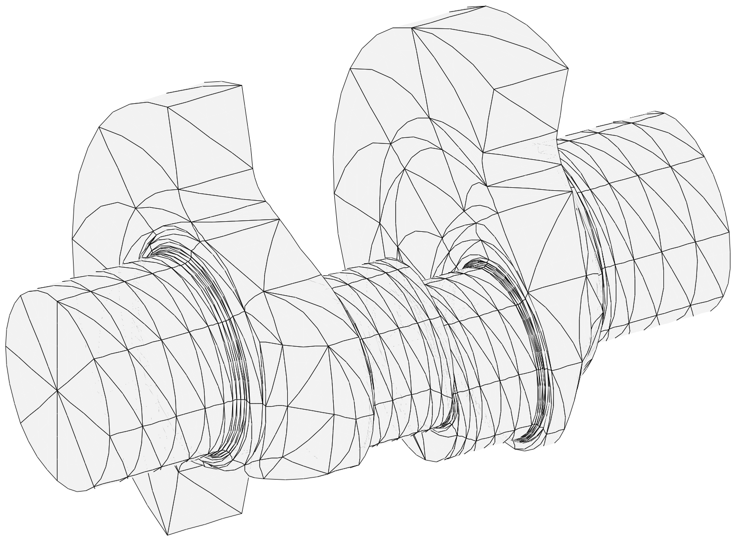
Zur Berechnung von 3D-Elastizitätsproblemen auf Parallelrechnern

Ralf Quatember

Mathematisches Institut A, 6. Lehrstuhl (Prof. Dr.-Ing. W. Wendland)
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
D–70569 Stuttgart

e–mail: `rmq@mathematik.uni-stuttgart.de`

Im Rahmen unseres BMBF-Projektes *Entwicklung vorkonditionierter Iterationsverfahren für Randelementmethoden der Thermoelastizität auf Parallelrechnern* in Zusammenarbeit mit der Mercedes-Benz AG Stuttgart (Dr. W. Möhrmann), ist die Entwicklung schneller Lösungsalgorithmen für Probleme aus der (Thermo-)Elastizitätstheorie auf Parallelrechnern unser Ziel.
Die dort auftretenden Probleme sind so komplex (mehrere 10.000 Unbekannte!), daß sie auf herkömmlichen Rechnern nicht mehr oder nur unter großen Genauigkeitseinbußen berechenbar sind.
In dem Vortrag soll auf einige Probleme bei 3D-Berechnungen und deren Lösung eingegangen werden sowie ein Programm zur Berechnung von 3D-Elastizitätsproblemen vorgestellt werden. Anhand einiger numerischer Beispiele, wie beispielsweise der unten dargestellten Kurbelwelle, sollen die erzielten Ergebnisse verglichen werden.



Schnelle Fouriertransformation für die BEM-Gleichungen der Festkörpermechanik

Sergej Rjasanow

Universität Kaiserslautern

D–67653 Kaiserslautern

e–mail: sr07@mathematik.uni-kl.de

Die Anwendung von Randelementmethoden auf Probleme der Festkörpermechanik führt auf lineare Gleichungssysteme mit einer 2x2 im zweidimensionalen und einer 3x3 Blockmatrix im dreidimensionalen Fall. Direkte Auflösungsmethoden sind für solche Matrizen asymptotisch uneffektiv, insbesondere für dreidimensionale Aufgaben. Die Anwendung iterativer Verfahren ist ebenfalls nicht unproblematisch, weil die Konditionszahl dieser Matrizen von der Größenordnung $O(h^{-1})$ ist und folglicherweise eine Vorkonditionierung notwendig wird. Die Konstruktion entsprechender Vorkonditionierungstechniken, sowohl für zwei- als auch für dreidimensionale Dirichlet-Probleme, bildet den Inhalt des Vortrages. Es wird gezeigt, daß die Matrizen, die nach Galerkin-Diskretisierung entstehen, im Fourier-Bild außerordentlich schwach besetzt sind, falls wir einen Kreis für zwei- bzw. einen Rotationskörper für dreidimensionale Probleme als topologisch äquivalentes Vorkonditionierungsggebiet annehmen. Das "Invertieren" der Vorkonditionierungsmatrizen benötigt $O(h^{-1}\log(h^{-1}))$ im zwei- bzw. $O(h^{-4})$ arithmetischen Operationen im dreidimensionalen Fall. Es ist wichtig zu bemerken, daß ein Aufwand von $O(h^{-4})$ arithmetischen Operationen im dreidimensionalen Fall zur Vorbereitungsarbeit gehört und beim Iterieren nur ein "optimaler" Aufwand von $O(h^{-3})$ arithmetischen Operationen notwendig ist. Der Algorithmus im dreidimensionalen Fall kann auch ohne Probleme auf massiv parallelen Computern realisiert werden, wobei diese Parallelisierung auf natürlicher Gebietszerlegung basiert. Die wichtigsten Bestandteile des parallelen Algorithmus sind die Schnelle Fouriertransformation, das Transponieren der auf den Prozessoren verteilten vollbesetzten Matrix sowie das Realisieren der parallelen Cholesky-Zerlegung für spezielle Block-Bandmatrizen. Die Cholesky-Zerlegung definiert auch die asymptotische Operationsanzahl beim gesamten Verfahren.

Nichtlineare Deformationen an singulären Punkten realisiert auf Parallelrechnern mittels FEM und asymptotischer Analyse

Matthias Scherzer

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: scherzer@imech.tu-chemnitz.de

Zur Bestimmung der Festigkeit von Materialverbunden in mikroelektronischen Bauelementen sind stabile und vergleichbare Lösungen von Randwertaufgaben der linearen und nichtlinearen Festkörpermechanik notwendig. Die Erstellung dieser Lösungen gestaltet sich oft wegen des auftretenden singulär-oszillierenden Verhaltens in Interface-Ecken-Umgebungen als sehr kompliziert. Eine modellseitige Modifikation der "scharfen" Ecke zur "abgerundeten" Form mit dem Ziel, das Lösungsverhalten zu vereinfachen, erhöht jedoch nur den numerischen und experimentellen Aufwand wegen der dann zu berücksichtigenden Beziehungen des mikroskopischen Betrachtungsniveaus und deren notwendigen Kopplung an das "Makrolevel".
Gegenstand der Arbeit ist die Erstellung dieser Lösungen in Form von Eigenfunktionsentwicklungen der nichtlinearen Festkörpermechanik in Interface-Ecken-Umgebungen sowie deren Kopplung an reguläre Finite Elemente Verfahren. Die programmtechnische Realisierung erfolgt auf modernen Parallelrechnern.
Der Grundgedanke des hier entwickelten Zugangs zur Ermittlung von singulären Spannungs- und Deformationsfeldern besteht in der Ersetzung der Wirkung der Interface-Ecken-Umgebung auf den Restkörper durch Steifigkeitswirkungen mit besonderen Invarianzabstandseigenschaften. Es wird gezeigt, wie sich das asymptotische Verhalten im Rahmen des schwierigen konstitutiven Modells der Fließtheorie numerisch abhandeln läßt. Für inkrementell proportionale Belastungstrajektorien sind relativ einfache Eigenfuntionsentwicklungen ermittelbar, die auch auf beliebige Trajektorien, die die Annahmen der inkrementellen Proportionalität nicht aufweisen, erweiterbar sind. Möglichkeiten der Einbeziehung von anisotropen Materialeigenschaften und geometrischen Nichlinearitäten werden erläutert.

Ein Konzept zur Visualisierung verteilter Daten für parallele Lösungsstrategien auf beliebigen Gittern in der FEM

Bernhard Schupp

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Freiburg
Hermann–Herder–Straße 10
D–79104 Freiburg

e–mail: bernhard@mathematik.uni-freiburg.de

Die Verwendung von effizienten Domain-Decomposition-Methoden im Rahmen von FEM ermöglicht die schnelle Bewältigung von Simulationsaufgaben auf Parallelrechnern bei sehr hoher Auflösung.
Das damit verbundene Datenaufkommen ist oft nur im parallelen Netz und nicht mehr auf skalaren Rechnern handhabbar, wodurch insbesondere auch ein postprocessing der Ergebnisse auf einer Grafikworkstation ausgeschlossen wird.
An dieser Stelle zeigt sich, daß häufig nicht nur die Anforderungen an die Geschwindigkeit, sondern auch die eingeschränkten Möglichkeiten des Datenzugriffs die Entwicklung leistungsfähiger Visualisierungskonzepte in paralleler Umgebung notwendig machen.
Es soll dazu ein Ansatz vorgestellt werden, bei dem ein schneller Zugriff auf verteilte FEM-Daten zu Visualisierungszwecken möglich ist, der aber die Visualisierungsmethoden selbst nicht parallelisiert.
Dieses Konzept erlaubt den Umgang mit beliebigen Gittern und erfordert nur einen kleinen Umfang an Message-Passing-Routinen aus der parallelen Umgebung.
Umstellungen in den Gittertypen und Ansatzfunktionen zur Entwicklungszeit numerischer Algorithmen erfordern lediglich die Anpassung einer kleinen prozeduralen Schnittstelle. Damit eignet sich das Konzept besonders zum visuellen Debuggen neuer paralleler Lösungsverfahren für FEM.

Einige Aspekte zur effizienten Realisierung von Randelementmethoden

Olaf Steinbach

Mathematisches Institut A
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
D–70569 Stuttgart

e–mail: steinbach@mathematik.uni-stuttgart.de

Die Diskretisierung von Randintegralgleichungen für gemischte Randwertprobleme erfordert die Auswertung singulärer Integrale sowie das Lösen linearer Gleichungssysteme mit vollbesetzten Steifigkeitsmatrizen, welche den Einsatz einer effizienten Vorkonditionierung bedingt.
Im Vortrag sollen einige Gesichtspunkte zur Darstellung von Oberflächenintegralen erläutert werden, die eine analytische Integration von auftretenden singulären Integralen ermöglichen. Dies beruht auf einer polynomialen Randapproximation, wie in der Geometriebeschreibung z.B. mit B–Splines oft vorgegeben ist.
Weiterhin wird eine allgemeine Technik zur Vorkonditionierung von Pseudodifferentialoperatoren angegeben.
Beispiele sind die Laplace–Gleichung sowie Probleme in der linearen Elastizität.

Parallele Kopplung von FEM und BEM bei Elastizitätsproblemen

Szabolcs Szikrai

Institut für Technische Mechanik/Festigkeitslehre
Universität Karlsruhe (T.H.)
Kaiserstr. 12
D–76128 Karlsruhe

e–mail: szabolcs.szikrai@mach.uni-karlsruhe.de

Am Institut für Technische Mechanik/Festigkeitslehre der Universität Karlsruhe wurde ein gekoppeltes Finite Element– und Randelementverfahren für die Berechnung dreidimensionaler linear–elastischer Probleme der Festkörpermechanik entwickelt. In dem Programmsystem werden Bereiche des untersuchten Bauteils, in denen hohe Spannungsgradienten auftreten, mit der Randelementmethode behandelt, während unkritische Bereiche mit der Finite Element Methode approximiert werden. Als naheliegendes Werkzeug für die Parallelisierung des Verfahrens bietet sich die Gebietszerlegungsmethode an. Im Vortrag wird vorgestellt, wie die *rekursive Substrukturtechnik* auf das gekoppelte FE/BE–System angewendet wird. Dabei wird das untersuchte 3D–Kontinuum in nicht überlappende FE– und BE–Substrukturen zerlegt, und die lokalen FE– und BE–Steifigkeitsmatrizen werden parallel berechnet. In den BE–Substrukturen werden durch den unsymmetrischen Steklov–Poincaré–Operator definierte lokale Neumann–Randwertprobleme gelöst. Die schwache Kopplung zwischen den BE– und FE–Verschiebungsfeldern auf den Rändern der BE–Substrukturen ergibt symmetrische und positiv definite äquivalente Steifigkeitsmatrizen für die BE–Subdomains. In den FE–Substrukturen werden die inneren Knotenunbekannten mit der Berechnung von lokalen Schur–Komplement Matrizen eliminiert. Das reduzierte System bezüglich der Interface–Knoten wird dann rekursiv aufgelöst. Als Prozessor–Topologie wird wegen der rekursiven Art des parallelen Algorithmus die Baum–Struktur verwendet.

A parallel implementation of the BPX preconditioner

Michael Theß

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz–Zwickau
D–09107 Chemnitz

e–mail: `m.thess@mathematik.tu-chemnitz.de`

Because of its meshsize independent condition number and easy parallelization the BPX preconditioning method became increasingly popular in recent years.
The paper starts with an introduction to the BPX method which is interpreted as an additive Schwarz method. Then we describe a parallel implementation of the BPX preconditioner that is based on a transformation of an existing hierarchical list into a corresponding BPX list.
The numerical comparison with the Yserentant preconditioner shows the superiority of the BPX preconditioner in the two- and three-dimensional case.

Use of Preconditioning Techniques with Homogenization for Elliptic Problems with Rough Coefficients

John R. Whiteman and Douglas Stewart

BICOM, Brunel University
Uxbridge Middlesex, UB8 3PH
United Kingdom

e–mail: `john.whiteman@brunel.ac.uk`
`douglas.stewart@brunel.ac.uk`

The task of producing accurate numerical approximations to the solutions of elliptic problems for which the coefficients in the governing differential equations change rapidly is notoriously difficult. In this talk the general use of domain decomposition techniques with suitable preconditioners for elliptic problems are first briefly described. A technique of homogenization for elliptic problems with rough coefficients is then presented. This is then used to define a preconditioning operator so that domain decomposition techniques can be applied to solve problems with rough coefficients. Examples of the use of this strategy are given.

Adaptive h-p approximation procedures

Gerhard Zumbusch

Konrad–Zuse–Zentrum (ZIB)
Heilbronner Straße 10
D–10711 Berlin

e–mail: zumbusch@zib-berlin.de

Standard finite element methods achieve convergence by decreasing the size of elements. The error is known to be below a certain power of the maximum element size, called algebraic (h) convergence. Depending on regularity of the solution, increasing the order of approximation in an element also leads to convergence (p). This convergence can be exponential measured in work units. Since regularity is a local property of the solution, one can increase local approximation orders where sufficient regularity is given and decrease element sizes where regularity lacks. This procedure, called h-p method achieves superior exponential convergence even when global regularity of the solution is missing.
However, there are certain drawbacks: There is no theoretical foundation for existing h-p heuristics. The heuristic control of h and p refinements has a serious impact on the global convergence. It sometimes leads to h-p adapted grids in direct contradiction with theory. Theory even proposes finite element grids, which can not be generated by existing h-p codes. Graded meshes and anisotropic refinement near singularities are difficult to implement and to control in an adaptive code.
We present an adaptive framework, which is able to deal with all such kinds of adaptive grids and algorithms, based e.g. on hexahedra and tetrahedra. We demonstrate the quality of different approaches using the example of adaptive numerical quadrature for reasons of simplicity. The framework implements adaptive h, local p and different h-p refinements, graded bisection and anisotropic grids. All decisions are taken by purely local greedy algorithms.